UiO : University of Oslo

Uke 10: Diskret Fourier Transform, II

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2013

Dagens temaer

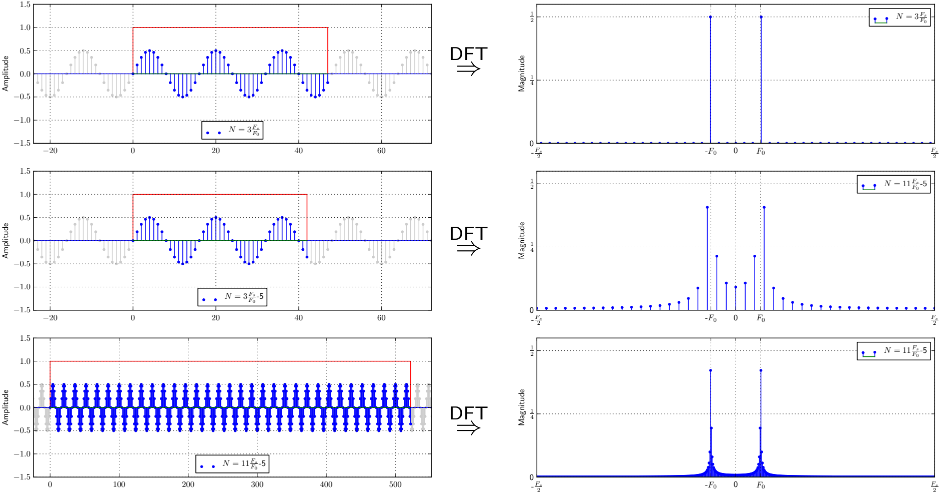
Tema

Endelig lengde data

- Hvis vi definerer et vindu $w[n] = \begin{cases} 1, & n \in 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0 & ellers \end{cases}$
- og et periodisk signal $x_p[n], \quad n \in -\infty \ldots \infty$
- så vil produktet av disse $x[n] = x_p[n]\, w[n]$ beskrive en tidsbegrenset versjon av $x_p[n]$.
- Tar vi DFT'en av $x[n]$ vil vi kunne få problemer med:
  - Spektral lekkasje (når $N \neq kT_s, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)
  - Glatting

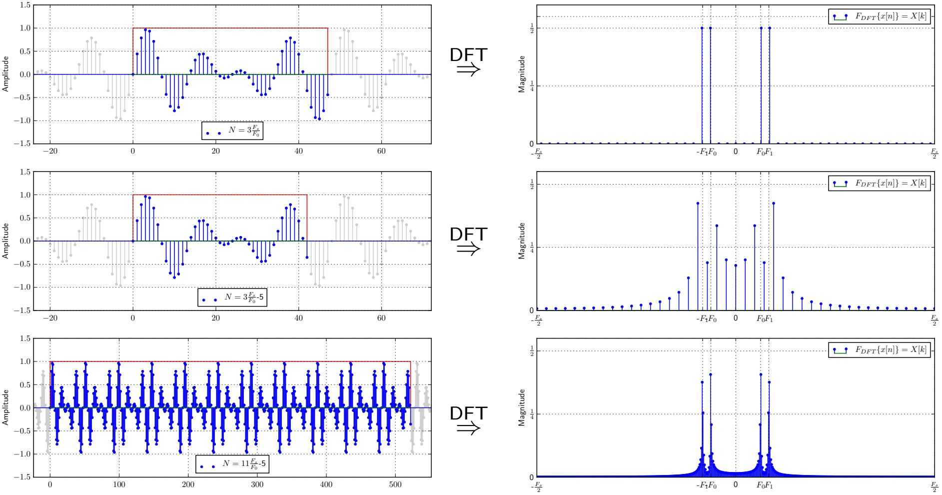
Endelig lengde data

Forskjellige utsnitt fra det periodiske signalet $x_p[n] = 0.5\sin(2\pi F_0 n)$:



Endelig lengde data

Forskjellige utsnitt fra det periodiske signalet
$x_p[n] = 0.5\sin(2\pi F_0 n) + 0.5\sin(2\pi F_1 n)$:



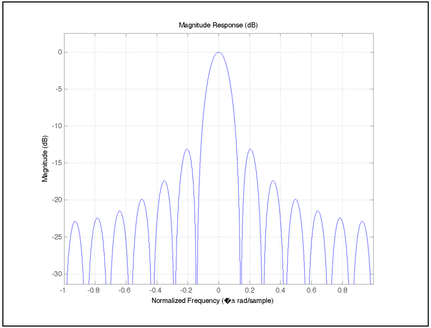
Spekter til en tidsbegrenset sinusfunksjon

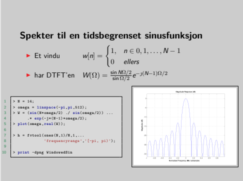
- Et vindu $$w[n] = \begin{cases} 1, & n \in 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0 & \textit{ellers} \end{cases}$$
- har DTFT'en $$W(\Omega) = \frac{\sin N\Omega/2}{\sin \Omega/2} e^{-\jmath(N-1)\Omega/2}$$

```
> N = 14;
> omega = linspace(-pi,pi,512);
> W = (sin(N*omega/2) ./ sin(omega/2)) ...
      .* exp(-j*(N-1)*omega/2);
> plot(omega,real(W));

> h = fvtool(ones(N,1)/N,1,...
             'frequencyrange','[-pi, pi)');

> print -dpng WindowedSin
```





Fourier transformen til et diskret aperiodisk windu

- Gitt et diskret aperiodisk vindu $w[n] = \begin{cases} 1, & n \in 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0, & ellers \end{cases}$
- Da finner vi frekvensresponsen ved DTFT:

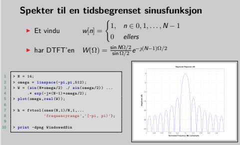
$$
\begin{aligned}
W(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[n]\, e^{-\jmath\Omega n} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\jmath\Omega n} \\
&= \frac{1 - e^{-\jmath\Omega N}}{1 - e^{-\jmath\Omega}} \\
&= \frac{\left(e^{\jmath\frac{\Omega N}{2}} - e^{-\jmath\frac{\Omega N}{2}}\right) e^{-\jmath\frac{\Omega N}{2}}}{\left(e^{\jmath\frac{\Omega}{2}} - e^{-\jmath\frac{\Omega}{2}}\right) e^{-\jmath\frac{\Omega}{2}}} \\
&= \frac{2\jmath \sin\frac{\Omega N}{2}}{2\jmath \sin\frac{\Omega}{2}} \frac{e^{-\jmath\frac{\Omega N}{2}}}{e^{-\jmath\frac{\Omega}{2}}} \\
&= \frac{\sin\frac{\Omega N}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}} e^{-\jmath\frac{\Omega(N-1)}{2}}
\end{aligned}
$$

Her gjenkjenner vi amplitude- og fasedelen lett:

$$W(\Omega) = |W(\Omega)|\, e^{\jmath\Theta_W(\Omega)}$$

$$|W(\Omega)| = \frac{\sin\frac{\Omega N}{2}}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

$$\Theta_W(\Omega) = -\frac{\Omega(N-1)}{2}$$



Analyse av $|W(\Omega)|$ for det rektangulære vinduet

- *Toppverdien i $\Omega = 0$*: $|W(0)| = ?$

$$|W(0)| = \lim_{\Omega\to 0} \frac{\sin \frac{\Omega N}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} = \lim_{\Omega\to 0} \frac{\frac{\Omega N}{2}}{\frac{\Omega}{2}} = N$$

- *Avstanden fra $\Omega = 0$ til nullpunktene*:

$$|W(\Omega)| = \frac{\sin \frac{\Omega N}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} = 0 \qquad \text{når} \qquad \sin \frac{\Omega N}{2} = 0$$

$$\text{dvs.} \qquad \frac{\Omega N}{2} = \frac{2\pi F N}{2} = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

  Første nullpunkt ved $\Omega = \frac{1}{N}$. Dette tilsvarer halve hovedlobebredden. Gang med 2 for å få hele.

- *Høyden på første sidelobe*: Vanskelig å finne en eksplisitt løsning for dette. Bruker en numerisk løsning.

Respons for typisk vindu; kvalitetsmål

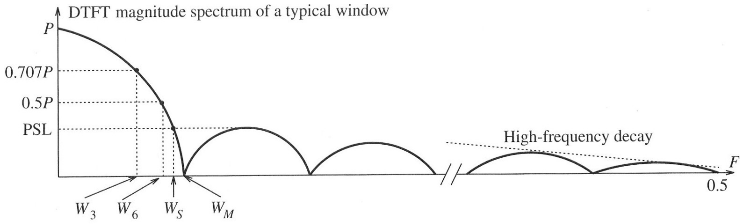


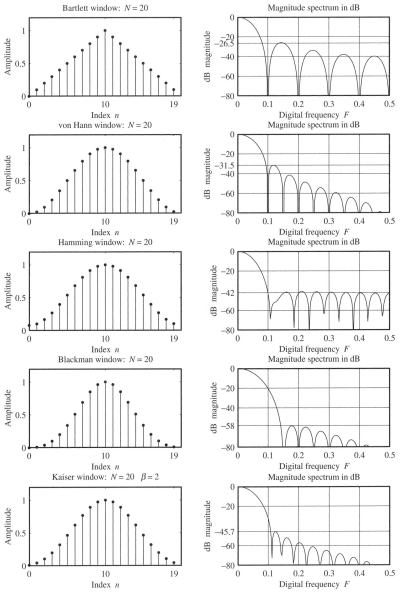
FIGURE 8.7 Spectrum of a typical window. Measures include the peak gain P, the 3-dB and 6-dB gain 0.707P and 0.5P corresponding to the widths W_3 and W_6, the peak sidelobe level PSL corresponding to the width W_S, and the main-lobe half-width W_M. The high-frequency decay D_S is typically measured in dB/decade or dB/octave

- Kvalitetsmål, vinduer;
  - Maks verdi; Peak value (P)
  - Maks sidelobe verdi, Peak Sidelobe Level (PSL)
  - -3dB bredde (W_3), $\sim \sqrt{2}/2\ P$
  - -6dB bredde (W_6), $\sim\ 0.5P$
  - Bredde 1. nullpkt (W_M)
  - Bredde for å nå max-SL nivå (W_S)

Noen typiske vinduer

- De forskjellige vinduene gir oss forskjellig kompromiss mellom oppløsning og lekkasje

FIGURE 8.8 Commonly used DFT windows and their spectral characteristics



Noen typiske vinduer ...

Entry	Window	Expression for $w[n]$	$W_M = \frac{K}{N}$	Normalized Peak Sidelobe
1	Boxcar	1	$2/N$	$0.2172 \approx -13.3$ dB
2	Bartlett	$1 - \frac{2\lvert k\rvert}{N}$	$4/N$	$0.0472 \approx -26.5$ dB
3	von Hann	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$	$4/N$	$0.0267 \approx -31.5$ dB
4	Hamming	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$	$4/N$	$0.0073 \approx -42.7$ dB
5	Blackman	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi k}{N}\right)$	$6/N$	$0.0012 \approx -58.1$ dB
6	Kaiser	$\frac{I_0(\pi\beta\sqrt{1-(2k/N)^2})}{I_0(\pi\beta)}$	$\frac{2\sqrt{1+\beta^2}}{N}$	$\frac{0.22\pi\beta}{\sinh(\pi\beta)} \approx -45.7$ dB (for $\beta = 2$)

NOTES: $k = 0.5N - n$, where $n = 0, 1, \ldots, N-1$. W_M is the main-lobe width.

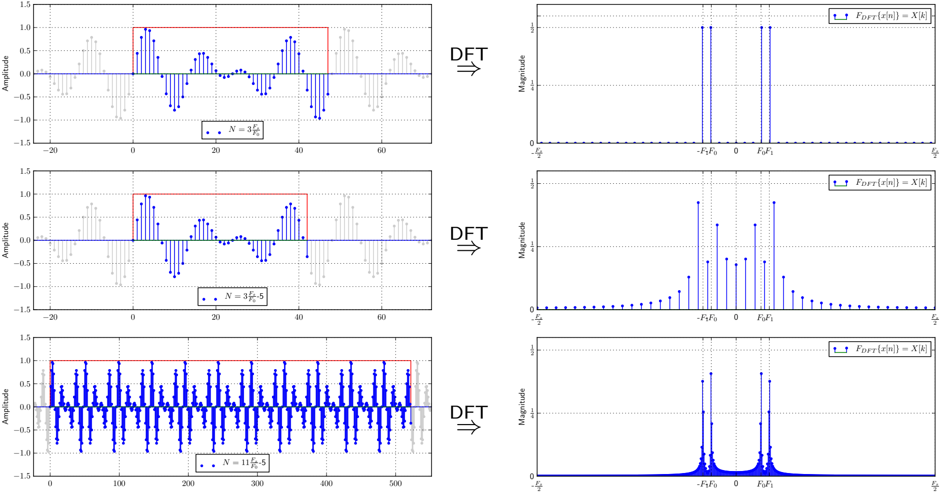
For the Kaiser window, $I_0(.)$ is the modified Bessel function of order zero.

For the Kaiser window, the parameter β controls the peak sidelobe level.

The von Hann window is also known as the *Hanning* window.

Endelig lengde data - rektangulært vindu

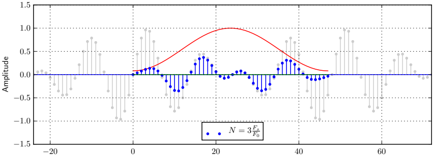
Forskjellige utsnitt fra det periodiske signalet
$x_p[n] = 0.5\sin(2\pi F_0 n) + 0.5\sin(2\pi F_1 n)$:



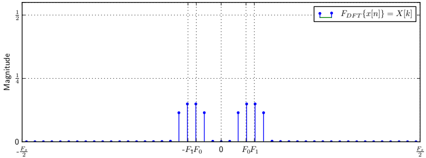
Endelig lengde data - Hamming vindu

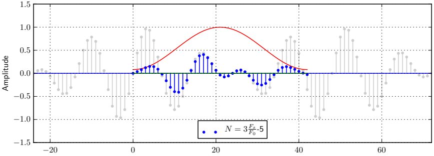
Forskjellige utsnitt fra det periodiske signalet

$x_p[n] = 0.5\sin(2\pi F_0 n) + 0.5\sin(2\pi F_1 n)$:

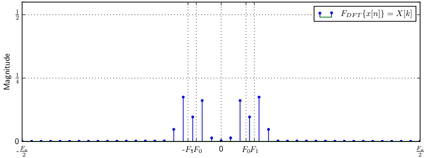


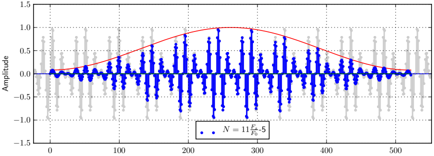
DFT $\Rightarrow$



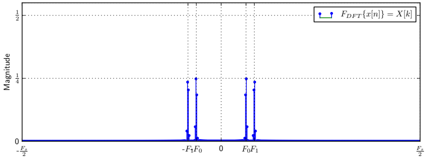


DFT $\Rightarrow$





DFT $\Rightarrow$



Oppløsning til vinduer

- Hvor nære kan to frekvenser være uten at vi får problemer med å skille dem?
- Frekvensoppløsning: $\Delta f = W_M F_s$, der W_M er avhengig av vinduet og angir avstand til første nullpunkt i magnitudespekteret.

Eksempel 8.13:

- Gitt:

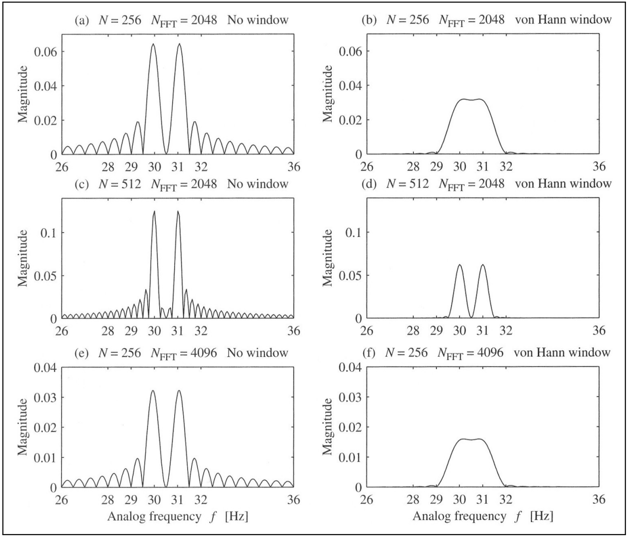
$$x(t) = A_1 \cos 2\pi f_0 t + A_2 \cos 2\pi (f_0 + \Delta f) t$$
$$A_1 = A_2 = 1 \qquad f_0 = 30\ Hz \qquad F_s = 128\ Hz$$

(a) Hva er minste Δf som kan bli oppløst ved bruk av Boxcar og Hanning når:
   i $N = 256,\ N_{\mathsf{FFT}} = 2048$
   ii $N = 512,\ N_{\mathsf{FFT}} = 2048$
   iii $N = 256,\ N_{\mathsf{FFT}} = 4096$

Oppløsning til vinduer

- Svar:
  (a) Hva er minste Δf som kan bli oppløst ved bruk av Boxcar og Hanning når:
    i $N = 256,\ N_{\text{FFT}} = 2048$
    $\Rightarrow$ Rect: $\Delta F = \frac{2}{N}F_s = \frac{2}{256}128Hz = 1Hz$
    $\Rightarrow$ Hann: $\Delta F = \frac{4}{N}F_s = \frac{4}{256}128Hz = 2Hz$
    ii $N = 512,\ N_{\text{FFT}} = 2048$
    $\Rightarrow$ Rect: $\Delta F = \frac{2}{N}F_s = \frac{2}{512}128Hz = 0.5Hz$
    $\Rightarrow$ Hann: $\Delta F = \frac{4}{N}F_s = \frac{4}{512}128Hz = 1Hz$
    iii $N = 256,\ N_{\text{FFT}} = 4096$
    $\Rightarrow$ Rect: $\Delta F = \frac{2}{N}F_s = \frac{2}{256}128Hz = 1Hz$
    $\Rightarrow$ Hann: $\Delta F = \frac{4}{N}F_s = \frac{4}{256}128Hz = 2Hz$
- Rektangulært vindu gir best oppløsning, men har størst sidelober / mest lekkasje.
- Bedre oppløsning ved å øke N.
- Null-utvidelse har ingen effekt.
- Hanning gir halvparten av oppløsningen, men mindre lekkasje.

Oppløsning til vinduer



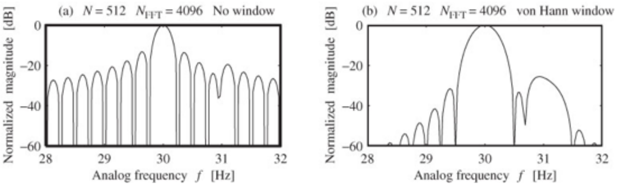
Frekvens oppløsning:

- Kriterie for oppløsning av to nabofrekvenser

Oppløsning til vinduer ...

- "Dynamisk område" oppløsning

FIGURE E.8.13b DFT spectra for Example 8.13(b)



Tema

Konvolusjon av lange sekvenser

- Gitt $h[n]$ med lengde N_1, og $x[n]$ med lengde N_2.
  1. Nullutvider $h[n]$ og $x[n]$ til lengde $N \geq N_1 + N_2 - 1$.
  2. Finner N-punkts DFT av $h[n]$ og $x[n]$.
  3. Multipliserer sammen $Y[k] = H[k]\,X[k]$.
  4. Finner invers av $Y[k] \rightarrow y[n] = h[n] * x[n]$.
- **Beregningsbyrde**:
  - En $2N$ samples konvolusjon krever N^2 komplekse multiplikasjoner.
  - Algoritmen over krever $3N\log_2(2N) + 2N$ komplekse multiplikasjoner v/FFT.
  - Gitt $N = 2^m$:
    $3N\log_2(2N) + 2N = 3\,2^m\log_2(2\,2^m) + 2\,2^m = 2^m(3m+5)$
    - $m = 5$: $2^m(3m+5) = 640$
    - $m = 10$: $2^m(3m+5) = 35\,840$
  - Lange sekvenser blir fort veldig beregningstunge!
- Løsning: Blokk-konvolusjon. To typer:
  - Overlap-add
  - Overlap-save

Overlap-add

1. Splitt $x[n]$ i m sekvenser $x_i[n]$ med lengde M.
2. Nullutvid $x_i[n]$ til 2-potens
3. Beregn $X_i[k] = F_{\text{DFT}}\{x_i[n]\}$ ved å bruke FFT
4. Legg sammen alle $X_i[k]$ $$X[k] = \sum_{i=0}^{M-1} X_i[k]$$

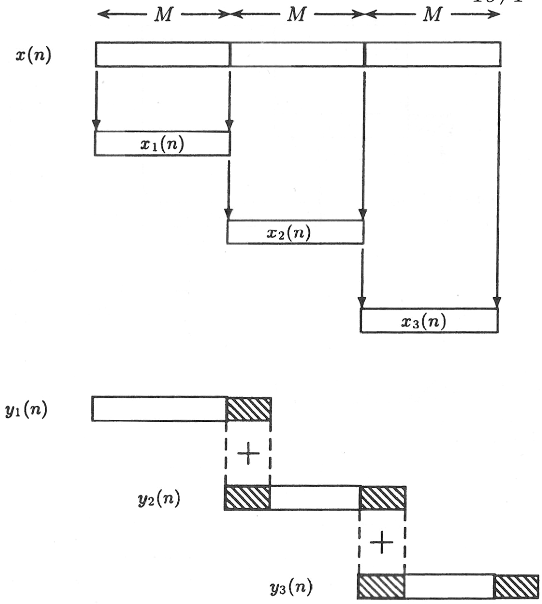


Fig. 6-4. Partitioning a sequence into subsequences of length M for the ovelap-add method of block convolution.

Overlap-save

Hvis $x[n]$ er den lange sekvensen:

1. Nullutvid $x[n]$ med $N-1$ nuller i front.
2. Del i k overlappende segmenter ($N-1$ overlapp) av med lengde M (typisk $M = 2N$)
3. Nullutvid $h[n]$ til lengde M.
4. Beregn periodisk konvolusjon for hver del og kutt overlapp.

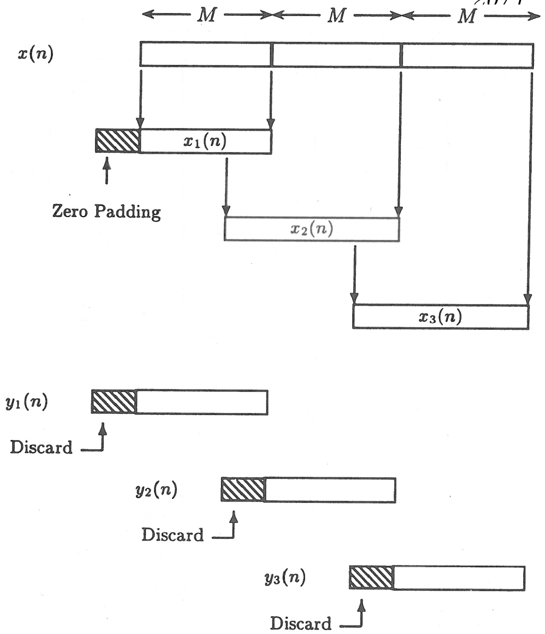


Fig. 6-5. Illustration of the overlap-save method of block convolution.

Interpolasjon i frekvens

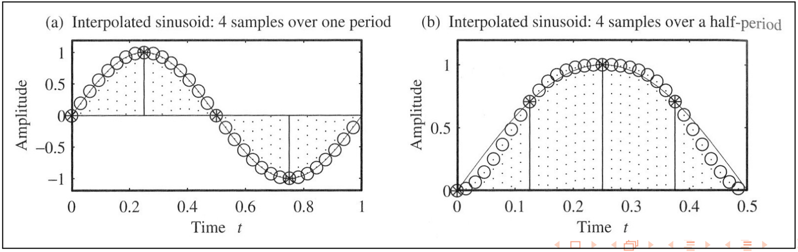
Ønsker å interpolere opp et signal med lengde N til lengde NM:

1. $x[n] \overset{\text{DFT}}{\longrightarrow} X[k]$
2. Nullutvid $X[k]$ til $X_i[k]$ på følgende måte:

$$X_i[k] = \begin{cases} \{X[0], \dots, X[N/2-1], \dots (M-1)N\ 0'er \dots X[N/2], \dots, X[N-1] & \text{hvis } N \text{ odde} \\ \{X[0], \dots, 0.5X[N/2], \dots (M-1)N-1\ 0'er \dots 0.5X[N/2], \dots, X[N-1] & \text{hvis } N \text{ like} \end{cases}$$

3. $x_i[n] \overset{\text{IDFT}}{\longleftarrow} X_i[k]$

- Det hadde vært identisk å nullutvide $x[n]$ med nuller mellom samplene, ta DFT'en, legge på et LP-filter, og inverstransformere.



Tema

Periodogrammet

- Effekt tetthets spekteret (Power Spectral Density, PSD) er definert ved
$$R_{xx}(f) = \mathscr{F}\{r_{xx}(t)\}$$
det $r_{xx}(t)$ er autokorrelasjonen av $x(t)$,
$$r_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, x(t+t')dt'$$
- Problem: Vi har ikke $x(t)$ men en samplet endelig tidssekvens $x[n]$.
- Vi må *estimere* $R_{xx}(f)$. En mulighet er *Periodogrammet*:
$$P[k] = \frac{1}{N}|X_{DFT}[k]|^2$$
  - Godt estimat for deterministiske, båndbegrensede power signaler samplet over Nyquist-raten.
  - Dårlig estimat for støyfullt signal.
  - Estimat ikke forbedret med økende N.

Forbedrede estimater

- Bartletts metode
  - Del dataene opp i L *ikke-overlappende* deler.
  - Beregn P for hver del og P_B som et midlet estimat.
- Welchs metode
  - Del dataene opp i K *overlappende* deler.
  - Beregn P fra vektede utgaver av hver del og P_W som et midlet estimat.
- Blackman-Tukeys metode
  - Beregn estimatet for $r_{xx}(t)$ ved $r_{xx}[n]$.
  - Beregn P_{B-T} som $DFT\{w \cdot r_{xx}\}$, der $w[n]$ er et vindu (som har positivt FT).
  - Kalles også "smoothed periodogram".

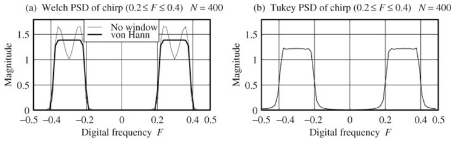
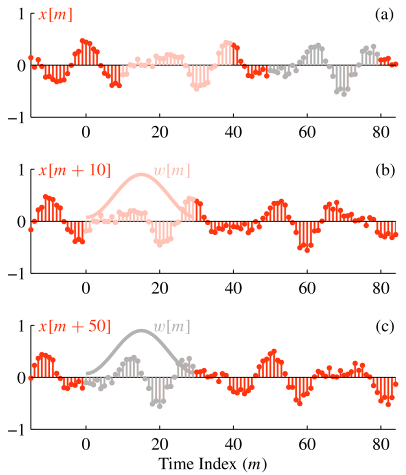


FIGURE 8.10 Welch and Tukey PSD of a chirp signal. A chirp signal is characterized by a spectrum that is constant over the frequency range present in the chirp. The unwindowed spectrum of a chirp signal is shown (in light) in the first plot. The

Tid-frekvens plott

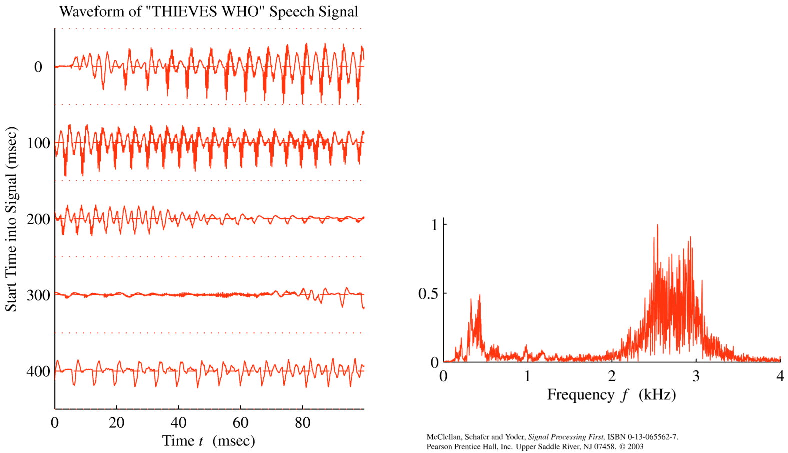
- Spektrogrammet definert ved

$$X[k,n] = \sum_{m=0}^{L-1} w[m]x[n+m] \times e^{-\jmath(2\pi k/N)m}$$



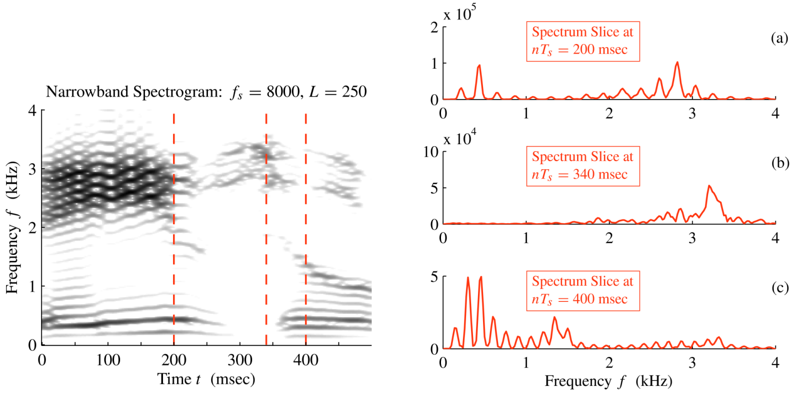
McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First,* ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

Spektrogram, eksempel



McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

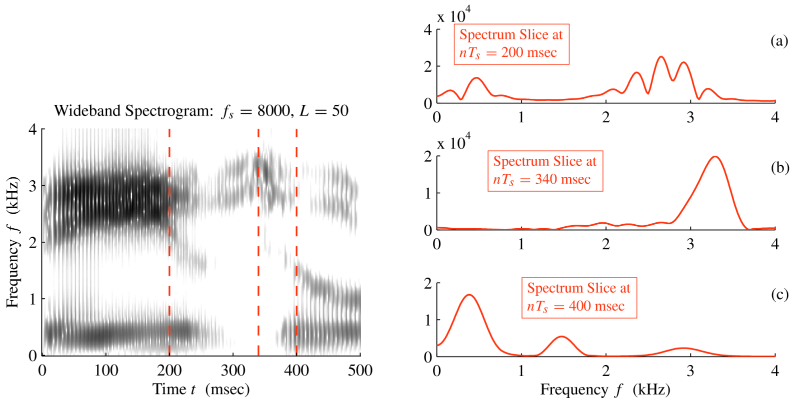
Spektrogram, eksempel ...



McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

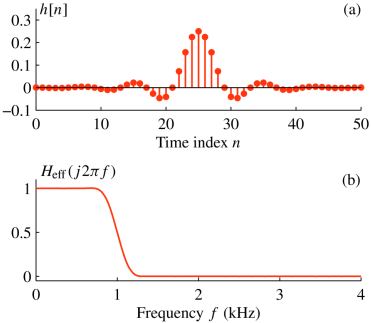
Spektrogram, eksempel ...



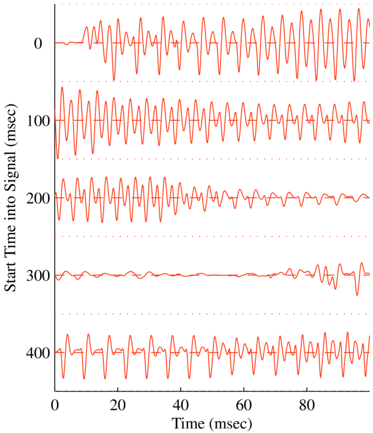
McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7. Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7. Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

Spektrogram, eksempel ...

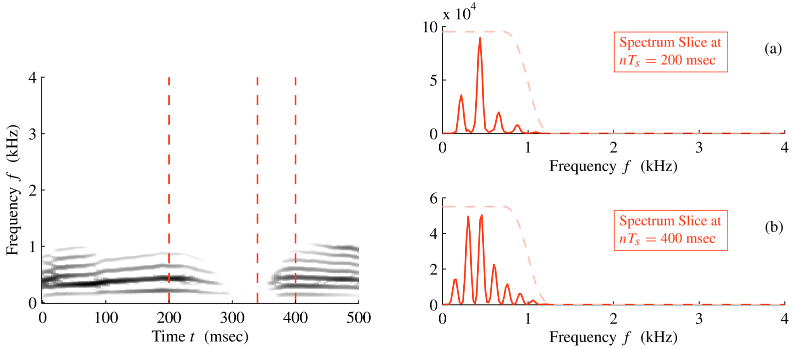


McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003



McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

Spektrogram, eksempel ...



McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

Tema

DFT på matriseform

8.13 Matrix Formulation of the DFT and IDFT

If we let $W_N = e^{-j2\pi/N}$, the defining relations for the DFT and IDFT may be written as

$$X_{\mathrm{DFT}}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8.46}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{\mathrm{DFT}}[k][W_N^{nk}]^*, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8.47}$$

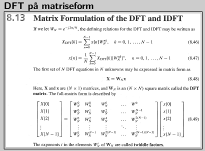
The first set of N DFT equations in N unknowns may be expressed in matrix form as

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \tag{8.48}$$

Here, $\mathbf{X}$ and $\mathbf{x}$ are $(N \times 1)$ matrices, and $\mathbf{W}_N$ is an $(N \times N)$ square matrix called the **DFT matrix**. The full-matrix form is described by

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \ldots & W^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \ldots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \ldots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \ldots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \tag{8.49}$$

The exponents t in the elements W_N^t of $\mathbf{W}_N$ are called **twiddle factors**.



DFT på matriseform

8.13 Matrix Formulation of the DFT and IDFT

If we let $W_N = e^{-j2\pi/N}$, the defining relations for the DFT and IDFT may be written as

$$X_{\mathrm{DFT}}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8.46}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{\mathrm{DFT}}[k][W_N^{nk}]^*, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8.47}$$

The first set of N DFT equations in N unknowns may be expressed in matrix form as

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \tag{8.48}$$

Here, $\mathbf{X}$ and $\mathbf{x}$ are $(N \times 1)$ matrices, and $\mathbf{W}_N$ is an $(N \times N)$ square matrix called the **DFT matrix**. The full-matrix form is described by

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \ldots & W^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \ldots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \ldots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \ldots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \tag{8.49}$$

The exponents t in the elements W_N^t of $\mathbf{W}_N$ are called **twiddle factors**.

Fra forrige foil så ser vi at DFT'en og IDFT'en er gitt som

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W}_N \boldsymbol{x} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}_N^{-1} \boldsymbol{X}.$$

Å regne den inverse til en matrise er i et generelt tilfelle ofte beregningstungt, men vi vet jo at forskjellen på DFT og IDFT er:

1. n og k bytter plass.
2. Fortegnet til fasen til den komplekse eksponentialen snus.
3. Den inverse transformen har en normalisering.

(1) oppnår vi ved å transponere $\boldsymbol{W}$, (2) ved så å konjugere, og (3) ved til slutt å normalisere:

$$\boldsymbol{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}(\boldsymbol{W}^*)^T = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}^H$$

Beregningsbyrden her er veldig lav.

FFT

- *Fast Fourier Transform* (FFT) er en effektiv måte å regne DFT'en av et signal på. Beregningsbyrden reduseres *mye* fordi:
  - Den *utnytter symmetri og periodiske egenskaper* for å unngå unødvendige beregniner.
  - Den *bryter signalet opp i mindre segmenter med lengde N* (typisk $N = 2$, kalles da *radix*-2) og tar DFT'en av disse i stedet.
  - Like- og oddeindekser behandles hver for seg, noe som er beregningsmessig gunstig.

FFT - Radix-2

- Vi prøver å ta DFT'en av like- og odde-indekser hver for seg:

$$
\begin{aligned}
X_{\text{DFT}}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, W_N^{(2n+1)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, W_N^{2nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, W_{N/2}^{nk} \\
&= X^e[k] + W_N^k X^o[k]
\end{aligned}
$$

- $X^e[k]$ og $X^o[k]$ kan nå igjen splittes opp i like- og odde-indexer, og til slutt står man igjen DFT'en av veldig små sekvenser.

FFT - Radix-2

- DFT'en av veldig små sekvenser:
  - 1-punkt:

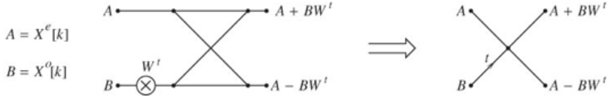
$$\mathscr{F}_{\text{DFT}}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\jmath 2\pi \frac{k}{N} n} = x[0]\, e^{0} = x[0]$$

  - 2-punkt:

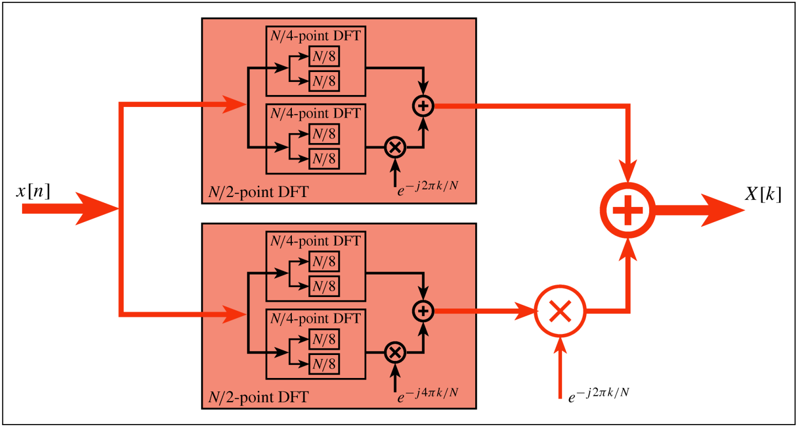
$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{\text{DFT}}\{x[n]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\jmath 2\pi \frac{k}{N} n} \\ &= \begin{cases} x[0]\, e^{0} + x[1]\, e^{0} & = x[0] + x[1] \qquad k = 0 \\ x[0]\, e^{0} + x[1]\, e^{-\jmath 2\pi \frac{1}{2}} & = x[0] - x[1] \qquad k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- DFT av små sekvenser $\Rightarrow$ veldig enkelt.
- Det er dette FFT'en utnytter.

FIGURE 8.16 A typical butterfly

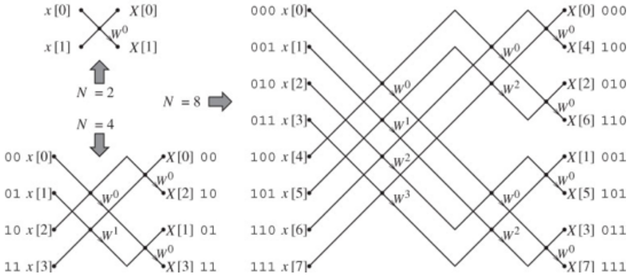


FFT - implementasjon



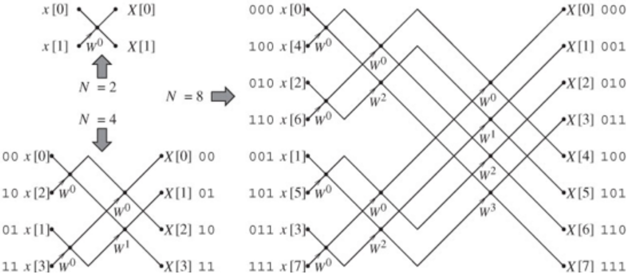
FFT, Decimation in frequency

FIGURE 8.18 The decimation-in-frequency FFT algorithm for $N = 2, 4, 8$



FFT, Decimation in time

FIGURE 8.20 The decimation-in-time FFT algorithm for $N = 2, 4, 8$



FFT, Beregningsbyrde

TABLE 8.7 ➤
Computational Cost of the DFT and FFT

Feature	N-Point DFT	N-Point FFT
Algorithm	Solution of N equations in N unknowns	$0.5N$ butterflies/stage, m stages Total butterflies $= 0.5mN$
Multiplications	N per equation	1 per butterfly
Additions	$N - 1$ per equation	2 per butterfly
Total multiplications	N^2	$0.5mN = 0.5N \log_2 N$
Total additions	$N(N-1)$	$mN = N \log_2 N$