Inverse z-Transform: Example

Carl Inge C. Nilsen (carlingn), UiO

13. september 2006

Oppgave

Finn den kausale tids-domene representasjonen $h[n]$ for filteret med systemfunksjon:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1 + z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{1}$$

Løsning

Vi begynner med å finne nullpunktene i nevneren (dvs. polene) ved å løse to grads-likningen $A(z) = 0$. Dette gir oss:

$$A(z) = 0 \quad \text{for} \quad z = \pm 0.5 \tag{2}$$

Derfor kan vi skrive systemfunksjonen som:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} \tag{3}$$

Vi vet at hvis vi finner den inverse z-transformasjonen til $\frac{1}{A(z)}$ (dvs. $w[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{A(z)}\right\}$), så kan vi finne den inverse z-transformasjonen til

$$H(z) = (1 + z^{-2})\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{A(z)} + z^{-2}\frac{1}{A(z)} \tag{4}$$

ved hjelp av linearitet og tids-skift, som:

$$h[n] = w[n] + w[n-2] \tag{5}$$

Vi må derfor først finne $w[n]$. Dette gjør vi ved delbrøksoppspaltning. Vi vil finne A og B, slik at:

$$\frac{1}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} = \frac{A}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{B}{1 + 0.5z^{-1}} \tag{6}$$

Vi multipliserer med $1 - 0.5z^{-1}$ på begge sider og får:

$$\frac{1}{1+0.5z^{-1}} = A + B\frac{1-0.5z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} \tag{7}$$

Vi evaluerer dette uttrykket i $z = 0.5$ og får:

$$A = \frac{1}{2} \tag{8}$$

Vi multipliserer nå begge sider med $1 + 0.5z^{-1}$ og får:

$$\frac{1}{1-0.5z^{-1}} = B + A\frac{1+0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \tag{9}$$

Vi evaluerer dette uttrykket i $z = -0.5$ og får:

$$B = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Dette betyr at:

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{0.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.5}{1+0.5z^{-1}} \tag{11}$$

som vi kan finne den (kausale) inverse z-transformasjonen til via tabelloppslag:

$$\begin{aligned} w[n] &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{0.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{0.5}{1+0.5z^{-1}}\right\} = 0.5\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} + 0.5\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1+0.5z^{-1}}\right\} \\ &= 0.5(0.5)^n u[n] + 0.5(-0.5)^n u[n] \end{aligned} \tag{12}$$

Vi setter inn i uttrykket for $h[n]$ og får:

$$\begin{aligned} h[n] = w[n] + w[n-2] &= (0.5)^{n+1}u[n] + (0.5)^{n+1}(-1)^n u[n] \\ &+ (0.5)^{n-1}u[n-2] + (0.5)^{n-1}(-1)^{n-2}u[n-2] \end{aligned} \tag{13}$$

Når man får et sånt uttrykk, så lønner det seg å forkorte. Dette kan forkortes helt ned til

$$h[n] = \delta[n] + 5(0.5)^n e^{j\pi n/2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[n-2] \tag{14}$$

men det krever noen triks! Dette er fremgansgmåten:
Vi ser at for $n \geq 2$ så vil vi kunne addere alle leddene, fordi $u[n] = u[n-2] = 1, n \geq 2$. Vi finner derfor summen:

$$(0.5)^{n+1} + (0.5)^{n+1}(-1)^n + (0.5)^{n-1} + (0.5)^{n-1}(-1)^{n-2} \tag{15}$$

$= (0.5)^{n-1}((0.5)^2 + (0.5)^2(-1)^n + 1 + (-1)^{n-2})$, merk at vi kan sette $(-1)^{n-2} = (-1)^n$

$= (0.5)^{n-1}(1.25 + 0.25(-1)^n + (-1)^n)$, merk $(-1)^n = e^{\pm j\pi n}$

$$= 5(0.5)^{n+1}(1 + (-1)^n) = 5(0.5)^{n+1}e^{j\pi n/2}(e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2})$$
$$= 5(0.5)^n e^{j\pi n/2}\cos(\pi n/2)$$

Merk at dette gjelder bare for $n \geq 2$. Vi må undersøke $n = 0$ og $n = 1$ i det opprinnelige uttrykket:

$$h[0] = 1, h[1] = 0$$

Vi trenger derfor å legge til et ledd som gir $h[0] = 1$. Dette gir oss det endelige uttrykket:

$$h[n] = \delta[n] + 5(0.5)^n e^{j\pi n/2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[n-2] \tag{16}$$