Plenumsregning 2 - 13/9 - 2016

1.4.8

a) Bruk binomialformelen til å vise

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Bevis: $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{(binomial-formelen)}$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \square$$

b) Gi et kombinatorisk bevis, basert:

1. Antall mulige delmengder av n ting er 2^n
2. En delmengde på k ting av en mengde på n ting kan plukkes ut på $\binom{n}{k}$ måter

Bevis: 2^n = antall mulige delmengder

= antall delmengder med 0 elementer

+ — " — 1 element

+ ...

⋮

+ antall delmengder med n elementer

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

2.1.8 Vis at $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$ der $y \neq 0$

Bevis: $\left|\frac{x}{y}\right| = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{huis } \frac{x}{y} \geq 0 \quad x, y \text{ samme fortegn} \\ -\frac{x}{y} & \text{huis } \frac{x}{y} < 0 \quad x, y \text{ motsatt fortegn} \end{cases}$

2 muligheter.

(1) x og y har samme fortegn

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{x}{y} = \frac{-x}{-y} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

(2) x og y har motsatt fortegn

$$\frac{|x|}{|y|} = -\frac{x}{y} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

$\Rightarrow$ formelen stemmer i alle tilfeller

$\square$

2.1.9 Vis at for alle reelle tall x, y, z er

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

Bevis: Bruker trekantulikheten $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|x-y| = |\overbrace{x \underbrace{-z}}^{a} \overbrace{\underbrace{+z}_{=0} - y}^{b}| \leq |x-z| + |z-y|$$

$\square$

2.1.10 Vis ved induksjon på n at

$$|a_1 + a_2 + \cdots a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \quad *$$

for alle reelle tall $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Bevis: Påstand P_n betyr at $*$ holder

Viser P_2 er sann

P_2 $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$ ok ifølge trekantulikhet.

Antar at P_k holder for $k > 2$

Betyr at $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$

Skal vise at P_{k+1} holder.

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}| = |\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots a_k)}_{a} + \underbrace{a_{k+1}}_{b}|$$

$$\overset{2.1.1}{\leq} |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}|$$

$$\overset{P_k \text{ er sann}}{\leq} |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

$\Rightarrow P_{k+1}$ er sann

$\square$

2.2.5 Er følgende påstander sanne?

a) Summen av to irrasjonale tall er irrasjonal

Nei: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$

b) Hvis a er irrasjonal er også $-a$ irrasjonal

Ja: Bevis: Anta ikke sant

$-a = \frac{x}{y}$ for $x, y \in \mathbb{Z}$

men da er $a = \frac{-x}{y}$ der $-x, y$ er heltall

Strider mot antagelsen om a er irr.

$\Rightarrow$ utsagnet er sant

c) Hvis a^2 er rasjonal er a rasjonal

Nei: $(\sqrt{2})^2 = 2$, men $\sqrt{2}$ er irrasjonal.

d) Hvis a^2 er irrasjonal er a det også

Ja: Hvis ikke sant, anta $a = \frac{x}{y}$ $x, y \in \mathbb{Z}$

Men da er $a^2 = \frac{x^2}{y^2}$ med $x^2, y^2 \in \mathbb{Z}$

Strider mot antagelsen

e) Hvis $a \neq 0$ er irrasjonal er $\frac{1}{a}$ det også

Ja: Anta ikke, dvs $\frac{1}{a} = \frac{x}{y}$ for $x, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a = \frac{y}{x}$ som er rasjonal

Rakk ikke denne, løsningsforslag er fra 2015

2.3.5 a) „$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$"

JA: $\max(\sup A, \sup B)$ må være øvre skranke for $A \cup B$.

På den andre siden er $\sup(A \cup B) \geq \sup A$, $\sup(A \cup B) \geq \sup B$

Det vil si at

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$$

Så $\max(\sup A, \sup) = \sup(A \cup B)$.

b) „$\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$"

Nei: La $A = \{0, 2, 3\}$ og $B = \{0, 1\}$. $A \cap B = \{0\}$.

Så $\sup A = 3$, $\sup B = 1$, $\sup(A \cap B) = 0$.

c) „$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$".

Som i a) er $\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B)$.

Men $\min(\inf A, \inf B)$ er en nedre skranke for $A \cup B$, så

$$\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B)$$

og resultatet følger.

d) „$\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$"

NEI: $A = \{0, 1, 3\}$ $B = \{2, 3\}$ $A \cap B = \{3\}$,

$\inf(A \cap B) = 3$, $\inf(A) = 0$, $\inf(B) = 2$.