MI1100 FORELESNING 7/9 - 2016

I DAG: TALL OG SIFFERSYSTEMER 2.1-2.2 og 3.1-3.3 i komp

3.14

BRØKDEL

Heltallsdel $\in \mathbb{Z}$

Hvis a og b er to naturlige tall, så betegner vi

a // b resultatet av å dele a på b og hive resten

a % b angir resten i divisjonen

Eks: $3//2 = 1$ og $3\%2 = 1$

$9//4 = 2$ og $9\%4 = 1$

$25//5 = 5$ og $25\%5 = 0$

$6//4 = 1$ og $6\%4 = 2$

$$a/b = a//b + \frac{a\%b}{b}$$

HELTALL

Se på: $3761 = 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 1$

$$= 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

Her er grunntallet er 10

Hva om vi bruker grunntallet 7 ?

F.eks: $341_7 = 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 176_{10}$

Generelt: Heltall i tallsystem med grunntall $\beta \in \mathbb{N}$ og $\beta > 1$ kan representeres som

$$(d_k d_{k-1} \cdots d_0)_\beta = d_k \cdot \beta^k + d_{k-1} \cdot \beta^{k-1} + \cdots + d_0 \beta^0$$

hvor d_i'ene er heltall mellom 0 og $\beta - 1$

Ex: $\beta = 2$ Tillatte siffer 0, 1

$$101_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5_{10}$$

Ex: $\beta = 16$ Tillatte „siffer" 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 og 15
a, b, c, d, e, f

$$2d7_{16} = 2 \cdot 16^2 + d \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 2 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0$$

$$= 727_{10}$$

Lemma Ethvert naturlig tall kan representeres på entydig måte med grunntall $\beta \in \mathbb{N}$ og $\beta > 1$

Bevis ved eksempel:

Ser på 3761_{10} og $\beta = 8$

Vi skal finne $d_0, d_1, d_2, d_3 \dots$ slik at

$$3761_{10} = d_3 \cdot 8^3 + d_2 \cdot 8^2 + d_1 \cdot 8^1 + d_0$$

Vi deler på 8

$3761 // 8 = 470$ og $3761 \% 8 = 1 = d_0$!

Vet at $470 = d_3 \cdot 8^2 + d_2 \cdot 8^1 + d_1$

får $470 // 8 = 58$ og $470 \% 8 = 6 = d_1$!

Deler på 8 igjen

$58 // 8 = 7$ og $58 \% 8 = 2 = d_2$

Deler på 8 igjen

$7 // 8 = 0$ og $7 \% = 7 = d_3$

Oppsummerer: $3761_{10} = 7261_8$

$8_{10} = 10_8$?

$= 1 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0$

Hva er 9_{10} i 8-tallsystemet $9_{10} = 11_8$

Ex: $B = 2$

$/2 \downarrow$

	%2
3761	1
1880	0
940	0
470	0
235	1
117	1
58	0
29	1
14	0
7	1
3	1
1	1
0	

$3761_{10} = 111010110001$

Ex: $B = 8$

$//8 \downarrow$

	%8
3761	1
470	6
58	2
7	7
0	

$3761_{10} = 7261_8$

Algoritme 3.6

For å finne sifferne til et tall a i β-tallsystem

$a_0 = a$
for $i = 0, \ldots, k$
  $d_i = a_i \% \beta$
  $a_{i+1} = a_i // \beta$

Alternativ algoritme

while $a > 0$
  $d = a \% \beta$
  $a = a // \beta$
  print d

BRØKTALL

Eks: $0.14 = 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

$$0.45928 = 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5}$$

Generelt er brøktall på formen $(0.\, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \cdots)_\beta$

$$= d_{-1} \cdot \beta^{-1} + d_{-2} \beta^{-2} + d_{-3} \cdot \beta^{-3} \ldots$$

Også her er d'ene tall mellom 0 og $\beta - 1$

Brøktall ligger i intervallet $[0,1)$

Hvordan kan vi representere en brøk i β-tallsystem

Eks: $a = 1/5$ med $\beta = 8$

Må finne $d_{-1}, d_{-2}, d_{-3} \cdots$ s.a

$$1/5 = d_{-1} 8^{-1} + d_{-2} 8^{-2} + d_{-3} 8^{-3} \cdots$$

Ganger med 8 på begge sider

$$1 + 3/5 = 8/5 = \underset{\text{Heltall}}{d_{-1}} + \underbrace{d_{-2} 8^{-1} + d_{-3} 8^{-2} + \cdots}_{\text{Brøkdel}}$$

$d_{-1} = 1$

Trekke fra heltallsdel på begge siden

Får

$$3/5 = d_{-2} 8^{-1} + d_{-3} 8^{-2} + \cdots$$

Ganger med 8 og får

$$4 + 4/5 = 24/5 = d_{-2} + d_{-3} \cdot 8^{-1}$$

$\Rightarrow d_{-2} = 4$

Fortsetter på samme måte for å finne flere siffer.