Løsningsforslag til utvalgte oppgaver i Kalkulus

Øyvind Ryan

4. oktober 2016

Oppgave 4.2.5

b)

Den homogene likningen $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ har karakteristisk likning $r^2 - 6r + 8 = 0$, som har røtter 2 og 4. Den generelle løsningen på den homogene likningen blir dermed $x_n^h = A2^n + B4^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = Cn + D$, og får da

$$\begin{aligned} C(n+2) + D - 6(C(n+1) + D) + 8(Cn + D) &= 9n \\ 3Cn - 4C + 3D &= 9n, \end{aligned}$$

som gir at

$$\begin{aligned} 3C &= 9 \\ -4C + 3D &= 0, \end{aligned}$$

som gir at $C = 3$ og $D = 4$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = A2^n + B4^n + 3n + 4$. Setter vi inn initialbetingelsene får vi likningene

$$\begin{aligned} A + B + 4 &= 3 \\ 2A + 4B + 7 &= 3, \end{aligned}$$

som gir $A = 0$, $B = -1$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = -4^n + 3n + 4$.

Oppgave 4.2.18

a)

Ut fra teksten i oppgaven tar vi ut $(1.02)^n a$ kroner det n'te året. Med renter på pengene fra året før får vi $1.06x_n$ kroner året etter, siden rentesatsen er 6%. Derfor får vi at

$$x_{n+1} = 1.06x_n - (1.02)^n a.$$

Initialbetingelsen blir $x_0 = 10$, siden vi starter med 10 millioner kroner på konto.

b)

Den generelle løsningen av den homogene likningen er $x_n^h = A(1.06)^n$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = c(1.02)^n$. Innsetting gir $c(1.02)^{n+1} = 1.06c(1.02)^n - (1.02)^n a$, som kan forenkles til $1.02c = 1.06c - a$, som gir $c = 25a$. Dene generelle løsningen blir dermed $x_n = x_n^h + x_n^p = 25a(1.02)^n + A(1.06)^n$.

Setter vi inn $x_0 = 10$ får vi $25a + A = 10$, som gir $A = 10 - 25a$. Løsningen blir derfor

$$x_n = 25a(1.02)^n + (10 - 25a)(1.06)^n.$$

Når n går mot ∞ er det her leddet $(10 - 25a)(1.06)^n$ som vil dominere. Hvis vi vil alltid ha penger må vi derfor ha at $10 - 25a \geq 0$, som gir at $a < 0.4$. 400000 kroner er derfor det største beløpet vi kan ta ut det første året hvis vi aldri skal slippe opp for penger på kontoen.

c)

$x_{80} = 0$ gir

$$\begin{aligned} 25a(1.02)^{80} + (10 - 25a)(1.06)^{80} = 0 \\ 25a(1.06^{80} - 1.02^{80}) = 10 \times 1.06^{80} \\ a = \frac{2}{5(1 - (1.02/1.06)^{80})}, \end{aligned}$$

som gir $a = 0.4193$, eller 419300kr. Vi kan altså ta ut litt mer penger per år hvis vi skal gå tom for penger etter 80 år. Dette høres jo rimelig ut.