Interpolasjon

x_0	x_1	x_2
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

$$f(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 = P(x_0)$$
$$f(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 = P(x_1)$$
$$f(x_2) = c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 = P(x_2)$$

<u>Newton formen</u>

$$P(x) = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)(x - x_1)$$

$$f(x_0) = c_0 = P(x_0)$$
$$f(x_1) = c_0 + c_1 (x_1 - x_0) = P(x_1)$$
$$f(x_2) = c_0 + c_1 (x_2 - x_0) + c_2 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = P(x_2)$$

9.2.2

$f(x) = x^2$ interpoler $f(x)$ med et polynom av grad 3.

x:	0	1	2	3
$f(x)$:	0	1	4	9

$$P(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-1) + c_3(x-0)(x-1)(x-2)$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-2)$$

$f(0) = 0 = c_0$

$f(1) = 1 = c_0 + c_1$

$f(2) = 4 = c_0 + 2c_1 + 2c_2$

$f(3) = 9 = c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3$

$c_0 = 0 \quad c_1 = 1$

$4 = 2 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = 1$

$9 = 3 + 6 + 6c_3 \Rightarrow c_3 = 0$

$$P(x) = x + x(x-1) = x^2$$

<u>Observer</u>: Hvis man interpolerer et polynom $p_n(x)$ av grad n, med et polynom $p_m(x)$ av grad $m > n$. Så er $p_m(x) = p_n(x)$.

9.2.4 Bevis at det interpolerende polynomet er entydig.

a og b) Vi ser bare på 2-grads polynomer.

x_0	x_1	x_2
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

La P_1 og P_2 være to 2-gradspolynomer som begge interpolerer $f(x)$ i punktene x_0 x_1 og x_2

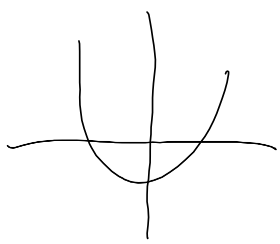
Da har vi

$$f(x_0) = P_1(x_0) = P_2(x_0)$$
$$f(x_1) = P_1(x_1) = P_2(x_1)$$
$$f(x_2) = P_1(x_1) = P_2(x_2)$$

La $P = P_1 - P_2$. Siden både P_1 og P_2 har grad 2 så er $P = P_1 - P_2$ grad 2 eller mindre.

Siden $P_1(x_i) = P_2(x_i)$ $i = 0, 1, 2$, så er

$P(x_0) = P(x_1) = P(x_2) = 0$



Et 2-gradspolynom kan maksimalt ha 2 nullpunkter, Siden P har 3 nullpunkter og har grad mindre eller lik 2 må P være polynomet som er 0 over alt $P(x) \equiv 0$.

Altså må $P_1 = P_2$

9.2.4 c) Polynom av grad n.

La $x_0, x_1, \ldots, x_n$ være de $n+1$ punkter vi ønsker å interpolere $f(x)$ i. Anta at P_1 og P_2 er av grad n og interpolerer $f(x)$ i $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Da er $f(x_i) = P_1(x_i) = P_2(x_i)$ $\quad i = 0, \ldots, n$.

La $P = P_1 - P_2$ $\quad$ P er et polynom av grad $\leq n$.

$P(x_i) = 0$ for $i = 0, 1, \ldots, n$

Et n'te grads polynom kan maksimalt ha n røtter.
P har $n+1$ røtter. Da er $P(x) \equiv 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
Altså er $P_1 = P_2$

Numerisk derivasjon.

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Feil:

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \underbrace{\frac{h}{2} M_1}_{\substack{\text{Trunkeringsfeil} \\ \text{(formel)}}} + \underbrace{\frac{2\varepsilon}{h} M_2}_{\substack{\text{Avrundingsfeil} \\ \text{(datamaskin)}}}$$

$$M_1 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$$

$$M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f(x)| \qquad \varepsilon \simeq 10^{-16}$$

11.1

$f(x) = e^x \qquad a = 1 \qquad h = 10^{-k} \quad k = 1 \ldots 14.$

Merk $f'(x) = e^x$

Skriv et program som regner ut feilen ved å bruke tilnærmingen $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$