1.1.3a $\sum_{n=1}^{6} 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126$

1.1.5 b)

$5+7+9+11+13 = \sum_{n=2}^{6}(2n+1)$

$2n+1 = 13$

$n = 6$

c) $4+8+12+16+\dots+64$

$= \sum_{k=1}^{16} 4k$

$4k = 64$

$k = 16$

e) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243}$

$= \frac{1}{(-3)^0} + \frac{1}{(-3)^1} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \frac{1}{(-3)^4} + \frac{1}{(-3)^5}$

$= \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{(-3)^n}$

1.1.6a)

$$\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9}\left(2(n-1)+3\right) = \sum_{n=1}^{9}(2n+1)$$

Finner sammenheng mellom k og n

$k=0=n-1$

c) $$\sum_{n=0}^{10} x^{n} y^{1-n} = \sum_{k=1}^{11} x^{k-1} y^{1-(k-1)} = \sum_{k=1}^{11} x^{k-1} y^{2-k}$$

Finner sammenheng mellom n og k

$n=0=k-1$

1.2.4 Vis ved induksjon at $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Tester for $n=1$

VS: $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

HS: $\displaystyle\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

OK

$$n=1 \;\to\; n=2 \;\to\; n=3 \quad \dots \quad n=k \;\to\; n=k+1$$

Antar at likheten stemmer for $n=1, 2, 3, \dots, k$

dvs. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$

Vil vise at likheten stemmer for $k+1$

dvs $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$

Begynner på venstre side

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$\square$

1.2.5

Påstand n^5-n er delelig med 5 for alle naturlige tall n ($n \in \mathbb{N}$)

$n=1$

$1^5-1=0 \qquad 0/5=0$

Antar at påstanden stemmer for $n=1,2,3\ldots k$
dvs. k^5-k er delelig med 5.
Vil vise at påstanden stemmer for $n=k+1$

$(k+1)^5-(k+1)$

$=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+\cancel{1}-k-\cancel{1}$

$=\underbrace{k^5-k}_{\text{delelig med 5 ved antagelse}} \quad \underbrace{5(k^4+2k^3+2k^2+k)}_{\text{delelig med 5}}$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

1.2.6 Påstand $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle $n \in \mathbb{N}$

$n=1$

$1(1^2+5) = 6$ $\qquad 6/6 = 1$ $\qquad$ OK

Antar at påstanden stemmer for $n = 1, 2, \ldots k$
dvs $k(k^2+5)$ er delelig med 6.
Vil vise at $(k+1)\left((k+1)^2+5\right)$ er delelig med 6.

$$(k+1)\left((k+1)^2+5\right) = (k+1)\left(k^2+2k+1+5\right) = k(k^2+5)+2k^2+k+k^2+2k+6$$
$$= k(k^2+5)+3k^2+3k+6 = \underbrace{k(k^2+5)}_{\substack{\text{delelig med} \\ \text{6 ved antagelse}}} + 3\left(k(k+1)+2\right)$$

Hvis k er et partall er $k = 2a$ hvor $a \in \mathbb{N}$. Da er
$3\left(k(k+1)+2\right) = 3\cdot 2\left(a(2a+1)+1\right)$ som er delelig med 6.
Hvis k er et oddetall er $k+1$ et partall og vi kan bruke samme argument som ovenfor.