Kompendiet

13.6.16 Skriv som et system av førsteordens differensialligninger

$$x'' = 2y - 4t^2 x$$
$$y'' = -2x - 2t x'$$

$x_0 = x$

$x_1 = x'$

$x_2 = y$

$x_3 = y'$

Setter inn

$x_1' = 2x_2 - 4t^2 x_0$

$x_3' = -2x_0 - 2t x_1$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0' &= x_1 \\ x_1' &= 2x_2 - 4t^2 x_0 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -2x_0 - 2t x_1 \end{aligned}}$$

For å løse med Eulers metode sett $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\vec{x}' = f(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 - 4t^2 x_0 \\ x_3 \\ -2x_0 - 2t x_1 \end{bmatrix}$$

for $k = 0, 1, \ldots n$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + h f(\vec{x}^{(k)}, t_k)$$
$$t^{(k+1)} = t^{(k)} + h$$

Kalkulus

10.4.1d)

$$xyy' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$$

$$xyy' = (1+x^2) + y^2(1+x^2)$$

$$xyy' = (1+x^2)(1+y^2)$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, y'dx = \int \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x}\, dx \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, dy = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\ln u = \ln\sqrt{u} \qquad \begin{aligned} u &= 1+y^2 \\ du &= 2y\,dy \end{aligned}$$

$$\ln\sqrt{u} = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$e^{\ln\sqrt{u}} = e^{\ln x + \frac{1}{2}x^2 + C} = e^{\ln x}\, e^{\frac{1}{2}x^2}\, \underbrace{e^{C}}_{D}$$

$$\sqrt{u} = Dx\, e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$u = Dx^2 e^{x^2}$$

$$1 + y^2 = Dx^2 e^{x^2}$$

$$y = \pm\sqrt{Dx^2 e^{x^2} - 1}$$

Proposjonal

Vi sier at y er proposjonal med x, hvis

$y = kx$ for en proposjonalitetskonstant k

10.4.10 a)

$x(t)$ - Antall fisk i et vann ved tiden t.

a) Anta at sjansen for at en gitt fisk skal møte en vilkårlig annen fisk i et lite tidsintervall er proposjonalt med populasjonens størrelse.

$$P_{møte}(t) = b\,x(t)$$

Sannsynligheten for å møte

Anta at fødselsraten er proposjonal med antall tilfeldige møter av to fisk.

$$x'(t) = x(t)\,P_{møte}(t) = b(x(t))^2 \qquad b>0$$

Dødsraten er proposjonal med antall fisk i vannet

$$x'(t) = -a\,x(t) \qquad a>0$$

Det gir differensialligningen

$$x'(t) = bx^2 - ax$$

10.4.10 b

$$x' = bx^2 - ax \qquad x(0) = x_0$$

$$\int \frac{x'}{x(bx-a)}\,dt = \int 1\,dt \qquad x' = \frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{1}{x(bx-a)}\,dx = t + C$$

$$\frac{1}{a}\int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\frac{a}{b}}\,dx = t + C \qquad \text{(Delbrøksoppspalting)}$$

$$\frac{1}{a}\left(-\ln(x) + \ln\left(x-\frac{a}{b}\right)\right) = t + C$$

$$\frac{1}{a}\ln\frac{x-\frac{a}{b}}{x} = \frac{1}{a}\ln\left(1-\frac{a}{bx}\right) = \ln\left(1-\frac{a}{bx}\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$\ln\left(1-\frac{a}{bx}\right)^{\frac{1}{a}} = t + C$$

$$\left(1-\frac{a}{bx}\right)^{\frac{1}{a}} = e^{t+c} = e^t e^c = C_1 e^t$$

$$1-\frac{a}{bx} = C_1 e^{at}$$

$$x = \frac{a}{b - ce^{at}}$$

Finner løsning når $x(0) = x_0$

$$x(0) = x_0 = \frac{a}{b-c}$$

$$x_0(b-c) = a$$

$$-cx_0 = a - x_0 b$$

$$-c = \frac{a}{x_0} - b$$

$$c = b - \frac{a}{x_0}$$

Løsning av ligningen er

$$x(t) = \frac{a}{b - ce^{at}} = \frac{a}{b - \left(b-\frac{a}{x_0}\right)e^{at}}$$

10.4.10c)

$$x(t) = \frac{a}{b - \left(b - \frac{a}{x_0}\right)e^{at}}$$

Finn k_0 slik at hvis $x_0 < k_0$ vil populasjonen dø ut og hvis $x_0 > k_0$ vil den gå mot uendelig på endelig tid

$x(t) \longrightarrow 0$ hvis $b - \left(b - \frac{a}{x_0}\right)e^{at} \longrightarrow \infty$

Det skjer hvis $b - \frac{a}{x_0} < 0$

$$x_0 < \frac{a}{b} = k_0$$

$x(t) \to \infty$ hvis $b - \left(b - \frac{a}{x_0}\right)e^{at} \to 0$

Det skjer hvis $b - \frac{a}{x_0} > 0$ $\quad x_0 > \frac{a}{b} = k_0$

$x(t) \to \infty$ når $b = \left(b - \frac{a}{x_0}\right)e^{at}$

$$\frac{b}{b - \frac{a}{x_0}} = e^{at}$$

$$\ln\left(\frac{b}{b - \frac{a}{x_0}}\right) = at$$

$$t = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{1 - \frac{a}{bx_0}} = -\frac{1}{a} \ln\left(1 - \frac{a}{bx_0}\right)$$

10.4.10 d

Anta at fisken høstes med konstant rate $c > 0$

Da er

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax + c$$

La $x(0) = x_0$ og finn en verdi $c = c_0$ slik at populasjonen holder seg konstant.

Populasjonen er konstant hvis

$$\frac{dx}{dt} = 0 = bx^2 - ax + c$$

Løser for x

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b}$$

Vi er bare interessert i den positive løsningen

Altså

$$x_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b}$$

Løser med hensyn på c og får

$$c = c_0 = \frac{(2bx_0 - a)^2 - a^2}{4b}$$