Om tallsystemer

$d_3 d_2 d_1 d_0 , d_{-1} \; d_{-2} \; \beta$

$d_3 \beta^3 + d_2 \beta^2 + d_1 \beta^1 + d_0 \beta^0 + d_{-1} \beta^{-1} + d_{-2} \beta^{-2}$

Komp 3.2.2a)

Algoritme 3.7

```
a ∈ N
i = 0
while a > 0:
    d_i = a % β
    a = a // β
    i = i + 1
```

Skriv tallet 40 i 4-tall systemet

40	0
10	2
2	2
0	

$40 \% 4 = 0$ $\quad 40 // 4 = 10$

$10 \% 4 = 2$ $\quad 10 // 4 = 2$

$2 \% 4 = 2$ $\quad 2 // 4 = 0$

$40_{10} = 220_4$

b) Skriv 17 i 5-tall systemet

17	2
3	3
0	

$17 \% 5 = 2$ $\quad 17 // 5 = 3$

$3 \% 5 = 3$ $\quad 3 // 5 = 0$

$17_{10} = 32_5$

3.2.5

a) Konverter til 16-tallsystemet

$$\underbrace{100}_{4}\ \underbrace{1101}_{d}{}_2 = 4d_{16}$$

$$\overset{8\,4\,2\,1}{1101} = 1\cdot8+1\cdot4+0\cdot2+1\cdot1 = 13$$

$$\overset{4\,2\,1}{100} = 1\cdot4+0\cdot2+0\cdot1 = 4$$

$\beta = 10$	$\beta = 16$
10	a
11	b
12	c
13	d
14	e
15	f

3.2.6 f

Konverter til 2-tallsystemet

$$0.f01_{16} = 0.1111\ 0000\ 0001_2$$

$f_{16} = 1111_2$

$0_{16} = 0000_2$

$1_{16} = 0001_2$

3.3.1 a) Påstand: Tallet 10_β er større i base 10 enn i base 9

Sann: $10_{10} = 10$ $\qquad 10_9 = 1\cdot 9^1 + 0\cdot 9^0 = 9 < 10$

$10_9 = 9$

b) Påstand: Tallet 0.1_β er større i base 10 enn i base 9

Falsk! $0,1_{10} = 1\cdot 10^{-1} = \frac{1}{10} < \frac{1}{9} = 1\cdot 9^{-1} = 0,1_9$

c) Påstand: Tallet 17_β er et primtall for alle β

Falsk: For $\beta = 8$ er $17_8 = 1\cdot 8 + 7 = 15$

d) Påstand $\frac{\ln \sqrt{e}^{\pi}}{\pi}$ er rasjonal

Sann: $\frac{\ln \sqrt{e}^{\pi}}{\pi} = \frac{\ln e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}\ln e}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$

3.3.3a) Konverter $\frac{1}{4}$ til base 2

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} \Rightarrow 0,01_2$

b) Konverter $3/7$ til base 3

Bruker algoritme 3.20

La $\frac{b}{c} \in (0,1)$ og $b, c \in \mathbb{N}$

for $i = -1, -2, \dots -k$

$d_i = (b \cdot \beta) // c$

$b = (b \cdot \beta) \% c$

$\frac{3}{7}$	1	$(3 \cdot 3) // 7 = 1$	$(3 \cdot 3) \% 7 = 2$
$\frac{2}{7}$	0	$(2 \cdot 3) // 7 = 0$	$(2 \cdot 3) \% 7 = 6$
$\frac{6}{7}$	2	$(6 \cdot 3) // 7 = 2$	$(6 \cdot 3) \% 7 = 4$
$\frac{4}{7}$	1	$(4 \cdot 3) // 7 = 1$	$(4 \cdot 3) \% 7 = 5$
$\frac{5}{7}$	2	$(5 \cdot 3) // 7 = 2$	$(5 \cdot 3) \% 7 = 1$
$\frac{1}{7}$	0	$(1 \cdot 3) // 7 = 0$	$(1 \cdot 3) \% 7 = 3$
$\frac{3}{7}$	1		
$\frac{2}{7}$	0		

$\frac{3}{7}_{10} = 0,102120\ 102120\dots_3$

3.3.7 Vis at dersom siffrene i et desimaltall forekommer i repeterende sekvenser så er tallet rasjonalt.

Bevis

Påstanden holder i enhver base β, så viser for en generell $\beta \geq 2$

La $a = 0,d_{-1} d_{-2} d_{-3} \dots$

La lengden på den repeterende sekvensen være t.

Da har vi en sekvens på formen $d_{-k}, \dots, d_{-k-t-1}$ for en $k \geq 1$

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} d_{-i} \beta^{-i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} d_{-i} \beta^{i}}_{M} + \sum_{i=k}^{\infty} d_{-i} \beta^{-i}$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty} \left(d_{-k-st} \beta^{-k-st} + \dots + d_{-k-t-1-st} \beta^{-k-st-t-1} \right)$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{-st} \underbrace{\left(d_{-k} \beta^{-k} + \dots d_{-k-t-1} \beta^{-k-t-1} \right)}_{N}$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{-st} N =$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty} (\beta^{-t})^{s} N = M + \frac{N}{1 - \beta^{-t}} = M + \frac{N \beta^{t}}{\beta - 1}$$

Setning 12.1.1 i kalkulus

$$\sum_{s=0}^{\infty} r^{s} N = \frac{N}{1-r}$$

$|r| < 1$

Vi har $|\beta^{-t}| < 1$

Siden M og N er endelige summer av rasjonale tall er M og N rasjonal.

β er et heltall, så $\frac{N \beta^{t}}{\beta - 1}$ er rasjonal.

Da er $M + \frac{N \beta^{t}}{\beta - 1}$ rasjonal, som var det vi ville vise.

3.4.2 a) $3_7 + 1_7 = 4_7$

c) $110_2 + 1011_2 = \underline{\underline{10001}}$

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1} \\ 110_2 \\ +\ 1011_2 \\ \hline 10001 \end{array}$$

3.4.3 a) $5_8 - 2_8 = 3_8$

b) $100_2 - 1_2 = 11_2$

$$\begin{array}{r} \cancel{1}\,\overset{\cancel{2}}{0}\,\overset{2}{0}_2 \\ -\ 1_2 \\ \hline 11_2 \end{array}$$

4.1.2 Addisjon i two's - complement

Finner alle tall i tabell 4.2

$-3+3 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1\,1\,1} \\ 1101 \\ +\ 0011 \\ \hline 1\,\underline{0000} \end{array}$$

Gir 0 i two's - complement

$7+1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1\,1} \\ 0111 \\ +\ 0001 \\ \hline \underline{1000} \end{array}$$

Gir -8 —— u ——

$-8-1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 1000 \\ +\ 1111 \\ \hline 1\,\underline{0111} \end{array}$$

Gir 7 —— u ——