5.2.6 Bruk flyttallsmodellen for addisjon og subtraksjon med 4 siffers signifikant og 1 siffer i eksponenten til å utføre beregningene nedenfor

(a) $12{,}24 + 4{,}23 = 16{,}47$

$$0{,}1224 \times 10^2 + 0{,}0423 \times 10^2 = 0{,}1647 \times 10^2$$

$\cancel{= 16{,}147}$

(b) $9{,}834 + 2{,}45$

$$0{,}9834 \times 10^1 + 0{,}2450 \times 10^1 = 1{,}2284 \times 10^1$$

$$= 0{,}1228 \times 10^1$$

(c) $2.314 - 2{,}273$

$$0{,}2314 \times 10^1 - 0{,}2273 \times 10^1 = 0{,}0041 \times 10^1$$

$$= 0{,}4100 \times 10^{-1}$$

(d) $23{,}45 - 23{,}39$

$$0{,}2345 \times 10^2 - 0{,}2339 \times 10^2 = 0{,}0006 \times 10^2$$

$$= 0{,}6000 \times 10^{-1}$$

5.2.6 e) $1 + x - e^x$ $\quad x = 0{,}1$

~~...~~ Datamaskin gjør dette i to steg.

$$1 + 0{,}1 = 0{,}1000 \times 10^1 + 0{,}0100 \times 10^1 = 0{,}1100 \times 10^1$$

$$(= 1{,}1)$$

$$1{,}1 + -e^{0{,}1} = 1{,}1 - 1{,}105 = 0{,}1100 \times 10^1 - 0{,}1105 \times 10^1$$

$$= -0{,}0005 \times 10^1 = \underline{\underline{-0{,}5000 \times 10^{-2}}}$$

5.2.2 Hvilke av utrykkene kan gi stor avrundingsfeil for minst en x-verdi

(1) ☐ x^4+2

(2) ☐ x^2+x^4

(3) ☐ $x/(1+x^2)$

(4) ☒ $1/2+\sin(-x^2)$

Begrunnelse: Anta vi bruker m-bits signifikant

(1) og (2) gir addisjon av positive tall. Potensielt kan det ene tallet være så mye større enn det andre at addisjonen ~~ikke endrer noen bit~~ av de to tallene er lik det største tallet. Da har vi fremdeles et tall med m-bits nøyaktighet som er det beste vi kan håpe på.

(3) Addisjon av positive tall som i (1) og (2). Multiplikasjon og divisjon gir liten avrundingsfeil.

(4) For $x \approx \sqrt{\frac{\pi}{6}}$ har vi at $\sin(-x^2) \approx -\frac{1}{2}$. Det gir subtraksjon av nesten like tall, som fører til stor avrundingsfeil.

5.3.2 La $\tilde{a}$ være en tilnærming til a.
Regn ut absolutt og relativ feil.
Undersøk om den relative feilen estimerer antall riktige siffer som gitt i observasjon 5.20

(a) $a = 1 \quad \tilde{a} = 0{,}9994$

$$|a - \tilde{a}| = 0{,}0006$$

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = 0{,}0006 = 6 \times 10^{-4}$$

Stemmer ikke overens med observasjon 5.20

(b) $a = 24 \quad \tilde{a} = 23{,}56$

$$|a - \tilde{a}| = 0{,}44$$

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = 0{,}01833 = 1{,}833 \times 10^{-2}$$

Stemmer overens med observasjon 5.20

5.3.2

c) $a = -1267$ $\quad \tilde{a} = -1267{,}345$

$|a - \tilde{a}| = 0{,}345$

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|} = 2{,}72 \times 10^{-4}$$

Stemmer overens med observasjon 5.20

d) $a = 124$ $\quad \tilde{a} = 7$

$|a - \tilde{a}| = 117$

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|} = 9{,}44 \times 10^{-1}$$

Stemmer ikke overens med observasjon 5.20

5.3.6

a) Vis at

$$\frac{1}{10} = 0,0001\ 1001\ 1001\ 1001\ 1001\ 100\ldots_2$$

hvor 1100 repeteres uendelig

$\frac{1}{10}$	0	$(1\cdot 2)//10 = 0$	$(1\cdot 2)\%10 = 2$
$\frac{2}{10}$	0	$(2\cdot 2)//10 = 0$	$(2\cdot 2)\%10 = 4$
$\frac{4}{10}$	0	$(4\cdot 2)//10 = 0$	$(4\cdot 2)\%10 = 8$
$\frac{8}{10}$	1	$(8\cdot 2)//10 = 1$	$(8\cdot 2)\%10 = 6$
$\frac{6}{10}$	1	$(6\cdot 2)//10 = 1$	$(6\cdot 2)\%10 = 2$
$\frac{2}{10}$	0		
	⋮		

~~Absolutt~~

~~Feil~~ ved å trunkere til 23 bits

Absolutt feil

$$= 0,\underbrace{0\ldots\ 0}_{23\text{ bits}}\ 1100\ 1100\ldots$$

Mens tallet $\frac{1}{10} = 0,0001\ 1001\ 1001$

Ser at den absolutte feilen er tallet $\frac{1}{10}$ forskjøvet med 20 bits

$\Rightarrow$ Absolutt feil $\frac{1}{10}\cdot 2^{-20}$

$\Rightarrow$ Maskinen rep. 0,1 som $0,1\,(1-2^{-20})$

5.36 (b)

Relativ feil

$$\frac{|a-\tilde{a}|}{|a|} = \frac{\cancel{\frac{1}{10}}(1-2^{-20})}{\cancel{\frac{1}{10}}} = 1-2^{-20}$$

(c) i_t - Heltall teller for den indre klokken målt i $\frac{1}{10}$ sekunder

$c = 0{,}000\,1100\,1100\,1100\,1100\,1100_2$

While (not ready):

$t = t + i_t * c$

Finn feilen etter en time

1 time inneholder $60 \cdot 60 \cdot 10 = 36\,000$ en tidels sekunder

Løkken regner ut

$$\sum_t i_t * c \approx c \sum_t i_t = c \cdot 36000 = \cancel{0{,}1} \cdot (1-2^{-20}) \cdot 360\cancel{0}0$$

$$= 3600\,(1-2^{-20}) \approx 0{,}003433$$

(d) En alternativ algoritme ~~[illegible]~~ som ikke akkumulerer avrundingsfeil ville ~~[illegible]~~ sett slik ut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{While not ready} \\ \quad t = t + i_t\end{array}}$$

og ~~[illegible]~~ delt $t/10$ ~~[illegible]~~ hver gong man trengte verdien til $1/10$ sekund.

5.4.2 Skriv om formlene for å unngå stor avrundingsfeil

(a)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Konjugatsetningen

(b) $\ln x^2 - \ln(x^2+x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+x}\right) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(c) ~~Bruker at~~ $\cancel{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$$\cancel{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$