Numerisk derivasjon

Problemstilling

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

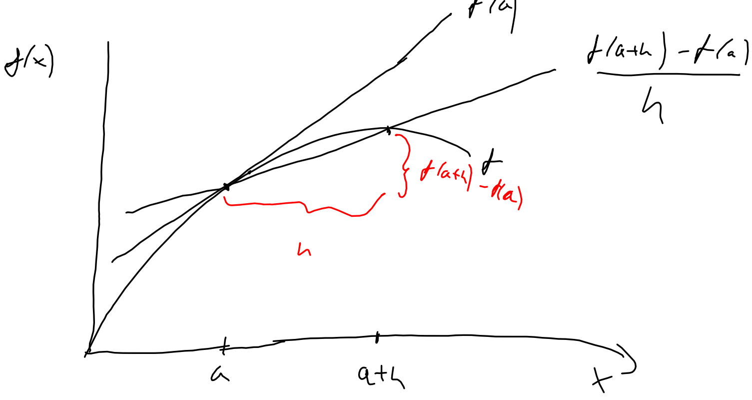
Hvordan finne en tilnærming til $f'(x)$ når vi bare kan regne ut funksjonsverdier til $f(t)$

Definisjon

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tilnærming

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ for en liten h.



Eksempel

$f(x) = \sin x$ $a = \frac{1}{2}$ $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} \ldots$

$f'(x) = \cos x$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observasjon

Hvis vi reduserer h med en faktor 10 reduseres feilen med en faktor 10.

Taylors formel med restledd

\xi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2}_{\text{Restledd}}$$

hvor $\xi \in (x,a)$ hvis $x<a$ og $\xi \in (a,x)$ hvis $x>a$.

La $x = a+h$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(a+h-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(a+h-a)^2$$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

Vet at $\xi \in (a, a+h)$

$$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{f''(\xi)}{2}h$$

$$M = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$$

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right| \leq \frac{M}{2}h$$

Observasjon

Hvis vi gjør h liten nok vil feilen begynne å øke.

Avrundingsfeil

Vi vet at på datamaskin vil tallet $f(a) \in \mathbb{R}$ representeres med det nærmeste flyttallet, vi kaller dette for $\overline{f(a)}$

Det vil si

$\overline{f(a)} = f(a)(1+\varepsilon_1)$ der ε_1 er relativ feil $|\varepsilon_1| \lessapprox 10^{-16}$ (64-bit flyttall)

$\overline{f(a+h)} = f(a+h)(1+\varepsilon_2)$ der ε_2 er relativ feil $|\varepsilon_2| \lessapprox 10^{-16}$ (64-bit flyttall)

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} \right| \leq \underbrace{\frac{M_1}{2} h}_{\text{Trunkeringsfeil}} + \underbrace{\frac{2\overset{7 \times 10^{-17}}{\varepsilon} M_2}{h}}_{\text{Avrundingsfeil}}$$

$$M_1 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)| \qquad M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|$$

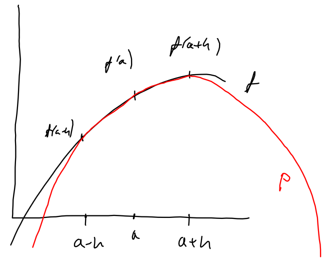
Finnes det andre måter å tilnærme den deriverte på?

Ja!

$\boxed{\text{Idee}}$

> **Idee**
>
> Tilnærme f med et polynom P som interpolerer f i noen passende punkter omkring a og bruke at $f'(a) \approx p'(a)$

Vi prøver med punktene $a-h,\ a,\ a+h$



x	$a-h$	a	$a+h$
$f(x)$	$f(a-h)$	$f(a)$	$f(a+h)$

Bruker newton formen

$$P(x) = c_0 + c_1(x-(a-h)) + c_2(x-(a-h))(x-a)$$

$$P'(x) = c_1 + c_2(2x-2a+h)$$

$$f'(a) \simeq P'(a) = c_1 + c_2(2a-2a+h) = c_1 + c_2 h$$

$$P(a-h) = f(a-h) = c_0 + 0 + 0$$

$$P(a) = f(a) = c_0 + c_1(a-(a-h)) + 0 = c_0 + c_1 h$$

$$P(a+h) = f(a+h) = c_0 + c_1(a+h-(a-h)) + c_2(a+h-(a-h))(a+h-a) = c_0 + c_1 2h + c_2 2h^2$$

$$f(a-h) = c_0$$

$$f(a) = c_0 + c_1 h$$

$$f(a+h) = c_0 + 2hc_1 + 2h^2 c_2$$

Det gir

$$c_0 = f(a-h), \quad c_1 = \frac{f(a)-f(a-h)}{h} \qquad c_2 = \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{2h^2}$$

Det gir tilnærmingen

$$f'(a) \approx P'(a) = c_1 + c_2 h = \frac{f(a)-f(a-h)}{h} + \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{2h^{\cancel{2}}}\cancel{h}$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

> Symmetrisk derivasjon
>
> $$f'(a) \simeq \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Feil ved $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a-h)}}{2h} \right| \leq \underbrace{\frac{h^2}{6} M_1}_{\text{Trunkeringsfeil}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{h} M_2}_{\text{Avrundingsfeilen}}$$

$$M_1 = \max_{x \in [a-h,\, a+h]} |f'''(x)| \qquad M_2 = \max_{x \in [a-h,\, a+h]} |f(x)|$$