Oppgave 1.2.8

Vis at for alle naturlig tall n er

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$$

Før vi begynner på induksjonsbeviset undersøker vi for hvilke $n \geq 1$ følgende ulikhet holder.

$$\frac{2n+3}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{2n+4}{\sqrt{n+2}}$$

Siden begge sidene er positive for alle $n \geq 1$, kan vi istedenfor studere den kvadrerte ulikheten

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+3)^2}{n+1} &\geq \frac{(2n+4)^2}{n+2} \\
\frac{(2n+3)^2}{n+1} &\geq 4(n+2) \\
(2n+3)^2 &\geq 4(n+2)(n+1) \qquad \text{(husk; vi ser bare på } n \geq 1\text{)} \\
4n^2+12n+9 &\geq 4n^2+12n+8
\end{aligned}$$

som holde for alle $n \geq 1$. Vi kan nå starte med induksjonsbeviset.

For $n = 1$ har vi $1 > 2(\sqrt{1+1}-1) \approx 0.83$, så påstanden holder for $n = 1$. Anta at påstanden holder for $k = 1, \ldots, n$. Vi vil vise at den også holder for $n+1$. Siden påstanden holder for $k = n$, har vi da

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} &> 2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}-1)+1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2n+3}{\sqrt{n+1}}-2 \\
&\geq \frac{2(n+2)}{\sqrt{n+2}}-2 \\
&= 2(\sqrt{n+2}-1)
\end{aligned}$$

Hvor vi i den første ulikheten bruker induksjonshypotesen.