10.4.14 Torricellis lov

$y(t)$ - Væskehøyde ved tiden t over utløpsrøret i en tank der det horisontale tverrsnittet ved høyde y har areal $A(y)$

$A(y)$ - Areal ved høyde y.

Torricellis lov

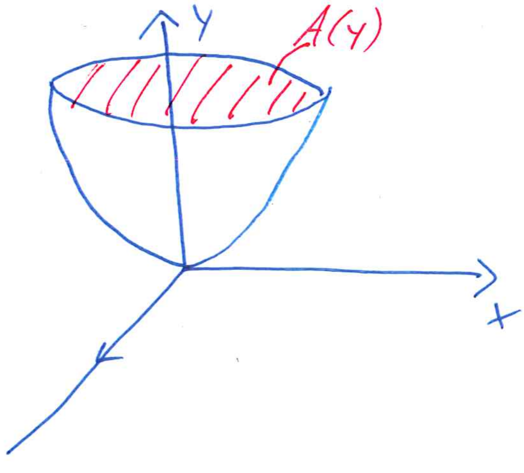
$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

$$A(y)\, y' = -a\sqrt{2gy}$$

a - konstant

g - tyngdens akselerasjon $\quad g \approx 9{,}81 \ (m/s^2)$

Tanken er gitt ved omdreiningsflaten til $y=x^2$ som vi roterer om y-aksen



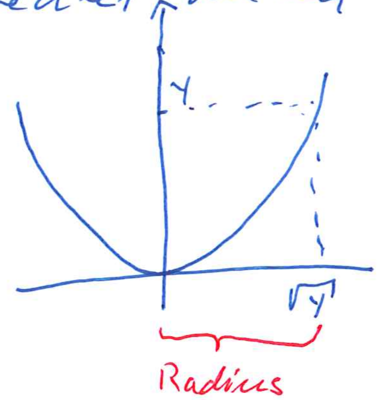
Ved tiden $t=0$ er $y=10$.

Anta at a ~~velges~~ er slik at $a\sqrt{2g}=1$.

10.4.14

Løs ligningen og bestem når tanken er tom

Ved høyde y vil $A(y)$ være arealet til en sirkel med radius $x = \sqrt{y}$



Arealet til en sirkel ~~og~~ er gitt ved πr^2 hvor r er radius.

Derfor er $A(y) = \pi x^2 = \pi y$.

Det gir ligningen

$$\pi y y' = -\sqrt{y}$$

$$\pi y^{1/2} y' = -1$$

$$\int \pi y^{1/2} y' dt = \int -1 \, dt$$

$$\pi \int y^{1/2} dt = -t + C$$

$$\pi \frac{1}{\frac{1}{2}+1} y^{\frac{1}{2}+1} = -t + C$$

$$\frac{2}{3}\pi y^{\frac{3}{2}} = -t + C$$

$$C_1 = \frac{3C}{2\pi}$$

$$y^{\frac{3}{2}} = -\frac{3t}{2\pi} + C_1$$

$$y = \left(-\frac{3t}{2\pi} + C_1\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$y(0) = (0 + C_1)^{\frac{2}{3}} = 10$$

$$C_1 = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$y(t) = \left(-\frac{3t}{2\pi} + 10^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$y(t) = 0$$

$$-\frac{3t}{2\pi} + 10^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$t = \frac{2\pi\, 10^{3/2}}{3}$$