1.1.5e

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5}$$

$$= \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{(-3)^n}$$

1.1.8a Skriv summen enklere

$$\sum_{n=-3}^{7} (n+3)\, a^{n+3}$$

$$= \sum_{k=0}^{10} k\, a^{k}$$

Prøver med $k = n+3$

$n = -3 \implies k = -3+3 = 0$

$n = 7 \implies k = 7+3 = 10$

c) $$\sum_{n=1}^{11} \frac{1}{2n+2} = \sum_{n=1}^{11} \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{2k}$$

Prøver med $k = n+1$

$n = 1 \implies k = 1+1 = 2$

$n = 11 \implies k = 11+1 = 12$

1.2.4 Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Tester for $n=1$

VS

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

HS

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad \text{Ok}$$

Antar at påstanden holder for $n = 1, 2, 3, \ldots, k$

dvs. $$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{(k+1)} \qquad (*)$$

Vi vil vise at likheten stemmer for $k+1$

dvs. $$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Begynner på venstresiden

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} \overset{(*)}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

1.2.6 Påstand: $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle $n \in \mathbb{N}$

$n=1$ $\quad 1(1^2+5)=6$ er delelig med 6, så OK

Anta at påstanden holder for $n=1,2,3,\dots k$

dvs. at $k(k^2+5)$ er delelig med 6.

Vil vise at $(k+1)((k+1)^2+5)$ er delelig med 6.

$$(k+1)((k+1)^2+5)=(k+1)(k^2+2k+1+5)=k(k^2+2k+1+5)+k^2+2k+1+5$$

$$=k(k^2+5)+2k^2+k+k^2+2k+1+5 = k(k^2+5)+3k^2+3k+6$$

$$=k(k^2+5)+3(k(k+1)+2)=k(k^2+5)+3k(k+1)+6$$

Vi har at $k(k^2+5)$ er delelig med 6 per antagelse.

Videre er 6 delelig med 6. Hvis k er et partall

kan k skrives som $k=2a$ $\quad a\in\mathbb{N}$. Da er $3\cdot 2a(2a+1)=6a(2a+1)$

delelig med 6. Hvis k er et oddetall er $k+1$ et partall

og vi bruker det samme argumentet.

Ekstraoppgave

Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2} \qquad n \geq 1$$

Tester for $n=1$

VS

$$(-1)^{1+1} 1^2 = 1$$

HS

$$\frac{(-1)^{1+1} 1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{OK}$$

Antar at påstanden holder for $n = 1, \dots k$

dvs.

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{k+1} k(k+1)}{2} \qquad (*)$$

Vil vise at påstanden holder for $k+1$

dvs.

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{k+2} (k+1)(k+2)}{2}$$

Starter på venstre side

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} i^2 + (-1)^{k+1+1} (k+1)^2$$

$(-1)(-1) = 1$ Triks.

$$\underset{(*)}{=} \frac{(-1)^{k+1} k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2} (k+1)^2 = \frac{(-1)^{k+2} (-1) k(k+1)}{2} + \frac{2(-1)^{k+2} (k+1)^2}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{k+2}}{2} \left(-k^2 - k + 2(k+1)^2 \right) = \frac{(-1)^{k+2}}{2} \left(-k^2 - k + 2k^2 + 4k + 2 \right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+2}}{2} \left(k^2 + 3k + 2 \right) = \frac{(-1)^{k+2} (k+1)(k+2)}{2}$$