Binomialformelen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.4.8 Vis at $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

a)

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

b) Gi et kombinatorisk bevis for at $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

En mengde med n elementer har 2^n mulige delmengder

Dette kan sees ved at for hver av de n elementene er det to muligheter.

1. Det er med i delmengde
2. Det er ikke med i delmengden

Det totale antallet mulige måter å plukke ut elementer på blir da produktet av antall muligheter for hvert av elementene. Det vil si:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\text{-ganger}} = 2^n$$

Setning 1.3.3 (Reformulert)

Antall delmengder med k elementer fra en mengde med n elementer er $\binom{n}{k}$

Kombinatorisk bevis

2^n = Antall mulige delmengder

= Antall mulige delmengder med 0 elementer

+ ——— " ——— 1 element

+ ...

⋮

+ Antall mulige delmengder med n elementer

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

2.1.8

Vis at $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$ $y \neq 0$

Bevis

Vi har at

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{hvis } \frac{x}{y} \geq 0 \Rightarrow x, y \text{ har samme fortegn} \\ -\frac{x}{y} & \text{hvis } \frac{x}{y} < 0 \Rightarrow x, y \text{ har motsatt fortegn} \end{cases}$$

Det gir 2 muligheter

(1) x, y har samme fortegn

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{x}{y} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

(2) x, y har motsatt fortegn

$$\frac{|x|}{|y|} = -\frac{x}{y} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

Vi har da likhet i begge tilfeller

$\square$

2.1.9 Vis at $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ $\quad x, y, z \in \mathbb{R}$

(gjelder for $x, y, z \in \mathbb{C}$ også)

Bevis

Fra trekantulikheten har vi at

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Det gir

$$|x-y| = |\overset{a}{(x-z)} + \overset{b}{(z-y)}| \leq |x-z| + |z-y|$$

$\square$

2.1.10

Vis ved induksjon at

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

Bevis

For $n=1$ er det ikke noe å bevise, så vi starter med $n=2$

$|a_1+a_2| \le |a_1|+|a_2|$ (ved $\triangle$-ulikheten) OK

Anta at påstanden holder for $n=2,3\ldots k$

dvs, $|a_1+\cdots+a_k| \le |a_1|+\cdots+|a_k|$ $(*)$

Vil vise at påstanden holder for $k+1$

$$|a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}| \le |a_1+\cdots+a_k|+|a_{k+1}| \quad (\text{ved } \triangle\text{-ulikheten})$$
$$\le |a_1|+\cdots+|a_k|+|a_{k+1}| \quad \text{ved } (*)$$

$\square$

2.2.5 Sant eller usant ?

a) Summen av to irrasjonale tall er irrasjonal

Usant

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

b) $A \Rightarrow B \iff$ ikke $B \Rightarrow$ ikke A

Hvis a er irrasjonal så er $-a$ irrasjonal

Sant

Bevis. Anta at $-a$ er rasjonalt

da er $-a = \frac{x}{y}$ $x, y \in \mathbb{Z}$

Men da er $a = -(-a) = -\frac{x}{y}$ et rasjonalt tall.

c) Hvis a^2 er rasjonalt er a rasjonal.

Usant

2 er rasjonalt. $\sqrt{2}$ er irrasjonalt

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

2.2.5 d) a^2 irrasjonalt $\Rightarrow$ a er irrasjonalt

Sant

Anta a er rasjonal da er $a = \frac{x}{y}$ $x, y \in \mathbb{Z}$

$a^2 = \frac{x^2}{y^2}$ hvor $x^2, y^2 \in \mathbb{Z}$ Så a^2 er rasjonalt

e) Hvis a er irrasjonalt er $\frac{1}{a}$ irrasjonal

Sant

Anta $\frac{1}{a}$ rasjonalt. Da er $\frac{1}{a} = \frac{x}{y}$ $x, y \in \mathbb{Z}$

$a = \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}$ som er rasjonal.