Kalkulus

4.2.16

a) Har vunnet 10 millioner i lotto

6% rente

2% inflasjon

For å kompensere for inflasjonen vil du ta ut

a million det første året og 1,02a million det neste

~~og~~ $(1,02)^2 a$ millioner året etter der osv.

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}06x_n - (1{,}02)^n a \qquad x_0 = 10$$

Penger i banken, rente, uttak

$$x_{n+1} = 1{,}06x_n - (1{,}02)^n a$$

Anta at vi ikke tar ut noe før starten av det første året.

4.2.18c) Hva er det største a kan være hvis utbetalingen skal være evig.

$$x_{n+1} = 1{,}06\, x_n - (1{,}02)^n a$$

$$x_{n+1} - 1{,}06\, x_n = -(1{,}02)^n a$$

Homogen løsning

$$r - 1{,}06 = 0$$

$$r = 1{,}06$$

$$x_n^h = C(1{,}06)^n$$

Partikulær løsning

Prøver med $x_n^p = D(1{,}02)^n$

Setter inn

$$x_{n+1}^p - 1{,}06\, x_n^p = -(1{,}02)^n a$$

$$D\cancel{(1{,}02)^{n+1}} - 1{,}06\, D\cancel{(1{,}02)^n} = -\cancel{(1{,}02)^n}\, a$$

$$1{,}02D - 1{,}06D = -a$$

$$0{,}04D = a$$

$$D = \frac{a}{0{,}04} = \frac{a}{\frac{4}{100}} = \frac{100a}{4} = 25a$$

$$x_n^p = 25a\,(1{,}02)^n$$

Generell løsning

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C(1{,}06)^n + 25a\,(1{,}02)^n$$

$$x_0 = 10 = C + 25a$$

$$C = 10 - 25a$$

$$x_n = (10 - 25a)(1{,}06)^n + 25a\,(1{,}02)^n$$

For store n vil $(10-25a)(1{,}06)^n$ dominere uttrykket og $25a(1{,}02)^n$ vil alltid være positiv. For at jeg skal kunne ta ut penger evig må da $10 - 25a > 0$

$$\frac{10}{25} = 0{,}4 > a$$

Vi må derfor ta ut mindre enn 0,4 millioner eller mindre enn 400 000 kr.

c) La $x_{80} = 0$ Hva er a ?

$$x_n = (10 - 25a)(1{,}06)^n + 25a(1{,}02)^n$$

$$x_{80} = 0 = (10 - 25a)(1{,}06)^{80} + 25a(1{,}02)^{80}$$

$$0 = 10(1{,}06)^{80} - 25a(1{,}06)^{80} + 25a(1{,}02)^{80}$$

$$-10(1{,}06)^{80} = 25a\left((1{,}02)^{80} - (1{,}06)^{80}\right)$$

$$a = \frac{-10(1{,}06)^{80}}{25\left((1{,}02)^{80} - (1{,}06)^{80}\right)} = \frac{+10(1{,}06)^{80}}{+25\left((1{,}06)^{80} - (1{,}02)^{80}\right)}$$

$$\approx 0{,}4193$$

dvs. 419300 kr.

Komp ~~6~~.5.7

$$x_{n+2} - \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n = 0 \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

$$r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0$$

$$r = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{4\cdot 4}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$$

$$= \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_n = C\,2^n + D\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$x_0 = 1 = C + D \qquad \Rightarrow C = 1 - D$

$x_1 = \frac{1}{2} = 2C + \frac{1}{2}D$

$$\frac{1}{2} = 2(1-D) + \frac{1}{2}D$$

$$\frac{1}{2} = 2 - 2D + \frac{1}{2}D$$

$$-\cancel{\frac{3}{2}} = -\cancel{\frac{3}{2}}D$$

$\underline{D = 1} \qquad \Rightarrow C = 1 - D = 0$

$$x_n = 0\cdot 2^n + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Når vi simulerer dette på datamaskin vil avrundingsfeil i initialbetingelsene gjøre at vi simulerer ligningen

$$x_n = (0+\varepsilon_1)2^n + (1+\varepsilon_2)\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{hvor } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \approx 10^{-16}$$

For store n vil vi derfor få overflow

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad f(x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} + x_n$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n^2 \qquad f(x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} \cdot x_n^2$$