9.1.2a)

$$f(x) = \cos(x)$$

$a = 0$

c ligger i intervallet mellom x og a

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$$

Hvis vi deriverer n+1 ganger vet vi at

$$f^{(n+1)}(x) = \pm\cos(x) \text{ eller } f^{(n+1)} = \pm\sin(x)$$

$$|R_n f(x)| = \frac{\overbrace{|f^{(n+1)}(c)|}^{\leq 1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$$

For $x \in \mathbb{R}$ vil

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Alternativ 2 er riktig

$f(x) = e^x \qquad a = 0 \qquad x \in [0,1]$

Vi vet at

$x \in [0,1]$

$$\left| R_n f(x) \right| \leq \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

$$\left| R_n f(x) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{100}$$

$$\iff \quad 300 \leq (n+1)!$$

For $n = 5$ er $(n+1)! = 720$

Alternativ 4 er riktig

9.1.2c

$a = 0$

$f(x) = \sin(x) - 2x\,(c + x^2)^{-1}$

Hvordan velge c slik at

$T_3 f(x) = \frac{x^3}{3}$

$T_3 f(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2}x^2 + \frac{f'''(a)}{6}x^3$

Vi må ha $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$

$f(0) = 0 + 0 = 0$ OK

$f'(x) = \cos(x) + -2(c + x^2)^{-1} + 2x\,2x\,(c + x^2)^{-2}$

$= \cos(x) - 2(c + x^2)^{-1} + 4x^2(c + x^2)^{-2}$

$f'(0) = 1 - \frac{2}{c} + 0 = 0$

$1 = \frac{2}{c} \Rightarrow \underline{\underline{c = 2}}$

Alternativ 4 er riktig

9.2.2 . $f(x) = x^2$

Interpoler med et polynom $P_3(x)$ av grad 3
i punktene 0, 1, 2, 3. Hva er $P_3(4)$

$P_3(x) = x^2 + \cancel{0x^3}$ er et polynom av grad 3
som interpolerer $f(x)$ i 0, 1, 2, 3.
Ved unikhet av det interpolerende polynomet
er dette det eneste polynomet av grad 3
som interpolerer $f(x)$
Derfor er $P_3(4) = 4^2 = 16$

9.2.4 Bevis at det interpolerende polynomet er unikt

a og b Viser bare på 2-grads polynomer.

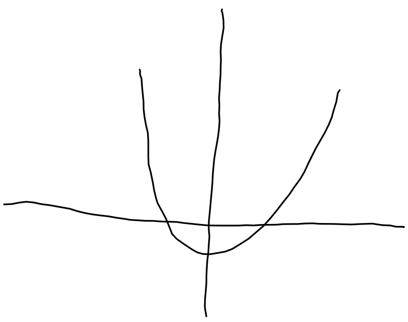
x_0	x_1	x_2
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

La P_1 og P_2 være to 2-gradspolynomet som interpolerer $f(x)$ i punktene x_0 x_1 x_2

$$f(x_0) = P_1(x_0) = P_2(x_0)$$
$$f(x_1) = P_1(x_1) = P_2(x_1)$$
$$f(x_2) = P_1(x_2) = P_2(x_2)$$

La $P = P_1 - P_2$. Siden både P_1 og P_2 har grad 2, så er $P = P_1 - P_2$ av grad 2 eller mindre.

Siden $P(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i) = 0$ $i = 0,1,2$



Et 2-gradspolynom kan maksimalt ha 2 nullpunkter. Siden P har 3 nullpunkter og har grad mindre eller lik 2 må P være polynomet som er 0 over alt $P(x) \equiv 0$

Då må $P_1 = P_2$ og vi har en motsigelse.

11.1.1

$f(x) = e^x \qquad a = 1$

$f'(x) = e^x$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \approx f'(a)$$

Feil

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| \leq \underbrace{M_1}_{\approx f''(a)} h + \frac{2\underbrace{\varepsilon}_{\approx 10^{-17}} \underbrace{M_2}_{\approx f(a)}}{h}$$

$$M_1 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)| \qquad M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|$$