Differensialligningen (Analytisk)

MAT-INF 1100 / MAT-IN 1105 4 typer ligninger

- Førsteordens lineære ligninger
- Separable (Førsteorden)
- Andreorden homogene ligninger med konstante koeffisienter
- Andreordens inhomogene ——— " ———

10.1.3d)

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{\arctan x}{x^2}$$

Førsteordens lineær ligning

Triks: Integrerende faktor

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x = \ln x^2$$

Integrerende faktor $e^{\ln x^2} = x^2$

$$x^2 \cdot \Big| \quad y' + \frac{2}{x} y = \frac{\arctan x}{x^2}$$

$$x^2 y' + 2xy = \arctan x$$

$$\int (x^2 y)' dx = \int \arctan x \, dx$$

$$x^2 y = \int \arctan x \, dx.$$

Viser bare på integralet på høyresiden og bruker delvis integrasjon

$$u = \arctan x \qquad v = x$$

$$u' = \frac{1}{1+x^2} \qquad v' = 1$$

$$\int \overset{v'}{1} \cdot \overset{u}{\arctan x} \, dx = \overset{v}{x} \overset{u}{\arctan x} - \frac{1}{2} \int \overset{v}{2x} \cdot \overset{u'}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$s = 1 + x^2$$
$$ds = 2x \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} ds$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(s) + C$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Viser på ligningen igjen

$$x^2 y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$y = \frac{1}{x} \arctan x - \frac{1}{2x^2} \ln(1+x^2) + C x^{-2}$$

10.4.1 d) <u>Separabel</u> Triks: få x og y på hver sin side av likhetstegnet.

$$xyy' = 1+x^2+y^2+x^2y^2$$

$$xyy' = (1+x^2) + y^2(1+x^2)$$

$$xyy' = (1+x^2)(1+y^2)$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}\, \overset{=\frac{dy}{dx}}{y'}\, dx = \int \frac{1}{x} + x\, dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\, dy = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\ln(1+y^2) = \ln x^2 + x^2 + 2C$$

$$e \quad \Big| \qquad 1+y^2 = e^{\ln x^2}\cdot e^{x^2}\cdot e^{2C}$$

$$y^2 = \overset{=e^{2C}}{D}\, x^2\cdot e^{x^2} - 1$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{Dx^2e^{x^2} - 1}}}$$

$$u = 1+y^2$$

$$du = 2y\, dy$$

$$\int \frac{2y}{1+y^2}\, dy = \int \frac{2y}{u}\, dy = \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \ln u \, (+C) = \ln(1+y^2)(+C)$$

10.5.1a Andreordens homogen ligning med konstante koeffisienter

$y'' + y' - 6y = 0$ Triks abc-formel

Karakteristisk ligning

$r^2 + r - 6 = 0$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$y(x) = Ce^{2x} + De^{-3x}$$

10.6.2 Andreordens inhomogen ligning med konstante koeff.

$$y'' - 2y' - 8y = -8x + 6 \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

Homogen løsning

$$y'' - 2y' - 8y = 0 \qquad r^2 - 2r - 8 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$y_h = Ce^{4x} + De^{-2x}$$

Partikulær løsning

$$\boxed{y'' - 2y' - 8y = -8x + 6}$$

Prøver med $y_p = Ax + B$

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

$$y_p'' - 2y_p' - 8y_p = -2A - 8(Ax + B) = -8Ax + (-2A - 8B) = -8x + 6$$

Det gir

$$-8A = -8 \qquad -2A - 8B = 6$$

$$A = 1 \qquad -2 - 8B = 6$$

$$-8B = 8$$

$$B = -1$$

Det gir

$$y_p = x - 1$$

Generell løsning

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

$$y = y_h + y_p = Ce^{4x} + De^{-2x} + x - 1$$

$$y' = 4Ce^{4x} + -2De^{-2x} + 1$$

$$y(1) = Ce^4 + De^{-2} + 1 - 1 = 0$$

$$D = -Ce^4 \cdot e^2 = -Ce^6$$

$$y'(1) = 4Ce^4 - 2De^{-2} + 1 = 1$$

$$4Ce^4 - 2De^{-2} = 0$$

$$4Ce^4 + 2Ce^6 e^{-2} = 0$$

$$4Ce^4 + 2Ce^4 = 0$$

$$6Ce^4 = 0$$

$$C = 0$$

Det gir $D = 0$

$$y = 0 + 0 + x - 1 = x - 1$$