2. Oblig i Mat-Inf 1310, Våren 2006

Løsningsforslag

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Den karakteristiske ligningen er

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(-3-\lambda)$$

så A har egenverdien 2 med multiplisitet 2 og egenverdien -3 med multiplisitet 1

Hvis $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er

$$(A - 2I)\,v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv v_1$$

og $A v_1 = 2 v_1$. Videre, hvis

$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er $A w = -3 w$.

Dermed er det generaliserte egenunderrommet som svarer til egenverdien 2

$$= \{ c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_i \in \mathbb{R} \} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

og det generaliserte egenunderrommet

som svarer til egenverdien -3 er

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

= ~~det~~ det ordinære egenunderrommet som svarer til egenverdien -3

(ii) Vi har $(A - 2I) v_2 = v_1$,
$(A - 2I) v_1 = 0$ og $(A + 3I) w = 0$
så etter (27), s. 393 i EP har
$x' = Ax$ løsningene

$$x_1(t) = v_1 e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = (v_1 t + v_2) e^{2t} = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

og

$$x_3(t) = w e^{-3t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

En fundamentalmatrise for systemet er dermed

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

og etter (28), side 406 i EP er da

$$e^{tA} = \Phi(t)\,\Phi(0)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Løsningen med $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ er da

$$e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(så en også kunne finne ved rekke-utvikling: $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$)

2] $\frac{dp}{dt} = \mu(t)p - kp$, $\mu \geq 0$, $\mu(t+1) = \mu(t)$, $p(0) > 0$. $\mu_0 = \sup\{\mu(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$

(i) Ligningen

$$\frac{dp}{dt} + (k - \mu(t))p = 0$$

er lineær og har en integrerende faktor

$$e^{\int (k-\mu(t))\,dt}$$

d. v. s. ligningen er

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\int (k-\mu(t))\,dt}\, p\right) = 0$$

Dermed er

$$p = C\, e^{-\int (k-\mu(t))\,dt}$$

Hvis $p(0)$ er gitt blir således

$$p(t) = p(0)\, e^{-\int_0^t (k-\mu(s))\,ds}$$

$$= \underline{\underline{p(0)\, e^{-kt}\, e^{\int_0^t \mu(s)\,ds}}}$$

Da $0 \le \mu(s) \le \mu_0$ er

$$0 \le \int_0^t \mu(s)\,ds \le \mu_0 t$$

så

$$1 \le e^{\int_0^t \mu(s)\,ds} \le e^{\mu_0 t}$$

så hvis dette kombineres med løsningsformelen ser vi

$$\underline{\underline{p(0)\, e^{-kt} \le p(t) \le p(0)\, e^{(\mu_0 - k)t}}}$$

(ii) Vi har

$$p(t+1) = p(0)\, e^{-k(t+1)}\, e^{\int_0^{t+1} \mu(s)\,ds}$$

$$= p(0)\, e^{-kt}\, e^{\int_0^{t} \mu(s)\,ds} \cdot e^{-k} \cdot e^{\int_t^{t+1} \mu(s)\,ds}$$

$$= p(t)\, e^{-k}\, e^{\int_t^{t+1} \mu(s)\,ds}$$

Men da μ er periodisk med periode 1 er $\int_t^{t+1} \mu(s)\,ds$ uavhengig av t. ~~Lik~~ (og lik $\int_0^1 \mu(s)\,ds$). Dermed

$$p(t+1) = V\, p(t)$$

der

$$\underline{V = e^{-k}\, e^{\int_0^1 \mu(s)\,ds}}$$

(iii) Det følger av (ii) at fuglepopulasjonen holder seg ~~konstant~~ uforandret uten å dø ut hvis og bare hvis $V = 1$, d.v.s. hvis og bare hvis

$$\underline{\int_0^1 \mu(s)\,ds = k}$$

I ord sier dette at ~~den~~ ~~middels~~ middelet av

Fødselsraten over et år er lik den konstante dødsraten, som er umulig.

Tilsvarende, fra $\mu(t+1) = V\mu(t) > 0$ følger

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$V < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^1 \mu(s)\,ds < k$$

$$\Updownarrow$$

Middelet av fødselsraten er mindre enn dødsraten

og

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t) = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$V > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^1 \mu(s)\,ds > k$$

$$\Updownarrow$$

Middelet av fødselsraten er større en dødsraten

3 (i) Etter eksistens- og entydighets-teoremet for lineære systemer (Teorem 1 på side 325 i EP) finnes det løsninger

$$\mathbb{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \mathbb{x}_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

av $\mathbb{x}' = \mathbb{A}(t)\mathbb{x}$ slik at

$$\mathbb{x}_k(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{'te plass}$$

Sett

$$\Phi(t) = [\mathbb{x}_1(t) \cdots \mathbb{x}_n(t)]$$

Da gjelder $\dfrac{d\,\Phi(t)}{dt} = \mathbb{A}(t)\,\Phi(t)$

og dessuten er $\Phi(t_0) = \mathbb{I}$

så $\det(\Phi(t_0)) = \det(\mathbb{I}) = 1 \neq 0$

Ferdig

(ii) La

$$W(t) = \det\left[\Phi(t)\right]$$

være Wronsky determinanten. Ved å ekspandere determinanten i produkter og bruke Leibnitz regel ser vi at

$$\frac{d}{dt}\left(W(t)\right) = \det\left(\left[\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\right]\right)$$

$$+ \det\left(\left[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2', \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\right]\right)$$

$$+ \dots + \det\left(\left[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n'\right]\right)$$

Men $\mathbf{x}_k' = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}_k$ så

$$\frac{d}{dt}\left(W(t)\right) = \det\left(\left[\mathbb{A}\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\right]\right)$$

$$+ \det\left(\left[\mathbf{x}_1, \mathbb{A}\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n\right]\right)$$

$$+ \dots + \det\left(\left[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbb{A}\mathbf{x}_n\right]\right)$$

(*)

$$= \left(a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)\right)\det\left(\left[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\right]\right)$$

$$= \operatorname{tr}\left(\mathbb{A}(t)\right) W(t)$$

Se side 13 (Dette er viktig men ikke lett å se direkte)

Dermed tilfredsstiller W den første ordens lineære differensiallignigen ~~[illegible]~~

$$W'(t) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}(t))\, W(t)$$

med løsning

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(\mathbb{A}(s))\, ds\right)$$

(iii) Det følger av den siste formelen og $W(t_0) \neq 0$ at $W(t) \neq 0$ for alle t.

(iv) Vi skal innse at løsningen av systemet

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

med initialbetingelsen $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\, \Phi(t_0)^{-1} \mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} \mathbf{f}(s)\, ds$$

En kan enten bruke variasjon av parametrene teknikken i EP,

eller verifisere dette direkte som følger:
Hvis $\mathbf{x}(t)$ er definert ved uttrykket ovenfor

$$\mathbf{x}'(t) = \Phi'(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds + \Phi(t)\left(\Phi(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\right)$$

Leibnitz og fundamentalkarakteret

$$= \mathbb{A}(t)\,\Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \mathbb{A}(t)\,\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds + \mathbf{f}(t)$$

$$= \mathbb{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

Da videre

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 + 0 = \mathbf{x}_0$$

er påstanden bevist

(v) Hvis $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ er

$$\mathbf{x}_1'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ og

$$\frac{1}{1-t^2}\begin{bmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)$$

$$= \frac{1}{1-t^2}\begin{bmatrix} -t+t \\ 1-t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1'(t)$$

Hvis $x_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ er $x_2'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og

$$\frac{1}{1-t^2} \begin{bmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} x_2(t)$$

$$= \frac{1}{1-t^2} \begin{bmatrix} -t^2+1 \\ t-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2'(t)$$

så x_1 og x_2 er løsninger

av

$$x'(t) = \frac{1}{1-t^2} \begin{bmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} x(t)$$

En fundamentalmatrise for systemet er dermed

$$\Phi(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t)] = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har da at

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{1-t^2} \begin{bmatrix} 1 & -t \\ -t & 1 \end{bmatrix}$$

så

$$\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = \frac{1}{1-t_0^2} \begin{bmatrix} 1-tt_0 & t-t_0 \\ t-t_0 & 1-tt_0 \end{bmatrix}$$

Så løsningen av initialverdiproblemet

er

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}(t_0)$$

$$= \frac{1}{1-t_0^2}\begin{bmatrix} 1-tt_0 & t-t_0 \\ t-t_0 & 1-tt_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

(vi) Fra formelen under (iv) og regningen under (v) følger at løsningen er

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds$$

$$= \Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t)\,\Phi(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{1-t_0^2}\begin{bmatrix} 1-tt_0 & t-t_0 \\ t-t_0 & 1-tt_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\frac{1}{1-s^2}\begin{bmatrix} 1-ts & t-s \\ t-s & 1-ts \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{bmatrix}ds$$

D.v.s. hvis $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ er

$$x_1(t) = \frac{1}{1-t_0^2}\left\{(1-tt_0)x_1^0 + (t-t_0)x_2^0\right\}$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\frac{1}{1-s^2}\left\{(1-ts)f_1(s) + (t-s)f_2(s)\right\}ds$$

og tilsvarende for $x_2(t)$ med $1 \leftrightarrow 2$.

Appendiks

Bedre bevis for at $\frac{d}{dt}\left(W(t)\right) = \mathrm{Tr}\left(A(t)\right) W(t)$ på side 8. Vi bruker at

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ og dermed at

$\det(CAC^{-1}) = \det(A)$ hvis C er ikke-singulær. Vi har at $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ og dermed at

$$\Phi(t+h) = \Phi(t) + hA(t)\Phi(t) + O(h^2)$$
$$= \left(I + hA(t)\right)\Phi(t) + O(h^2)$$

så

$$\det\Phi(t+h) = \det\left(I + hA(t)\right)\det\left(\Phi(t)\right) + O(h^2)$$

Hvis $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ er egenverdiene til $A(t)$, telt med multiplisitet, vet vi at $A(t)$ kan skrives på Jordan form (Sydsæter 5.6, slutt, i EP).

$$V A(t) V^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

så $\det(A(t)) = \lambda_1\lambda_2 \cdot \lambda_n$

Dermed

$$\det(\mathbb{I} + h\mathbb{A}(t))$$

$$= \begin{vmatrix} 1+h\lambda_1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1+h\lambda_2 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1+h\lambda_3 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+h\lambda_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1+h\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= 1 + h(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + O(h^2)$$

så

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} = \operatorname{tr}(\mathbb{A}(t))\,W(t) + O(h)$$

som leder til (når $h \to 0$)

$$W'(t) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}(t))\,W(t) \qquad \text{QED}$$