MAT1000 - Høsten 2006

Obligatorisk oppgavesett nr. 2.

Innleveringsfrist: Fredag 27/10-06 kl. 14.30

Besvarelsen leveres i ekspedisjonen på Matematisk institutt, rom 714 i N.H.Abels hus. Husk å skrive ditt navn på besvarelsens første side. Dersom du på grunn av sykdom eller andre tungtveiende grunner har behov for å utsette innleveringen, må du i god tid før innleveringsfristen sende søknad til Elisabeth Seland (rom 726, NHA, e-post: elisabhh@math.uio.no. Tlf. 22855907). Husk at sykdom må dokumenteres ved legeattest.

For å få godkjent oppgavesettet må ingen punkter leveres helt blanke, og det må komme frem av besvarelsen at du har prøvd *seriøst* å løse alle punktene. Halvparten av punktene må være fullstendig besvart.

Det er lov å diskutere oppgavene sammen med andre. Alle må imidlertid levere sin egen personlige besvarelse og kunne gjøre rede for den muntlig om nødvendig.

Det vises ellers til regelverket for obligatoriske oppgaver, som du finner på hjemmesiden til emnet.

Oppgave 1

En amatørfysiker har satt i gang et eksperiment med en svingende pendel og vil teste eksperimentet ut mot et par matematiske modeller.

a) Den første modellen tar ikke hensyn til andre krefter enn tyngdekraften og baserer seg på at pendelens posisjon i forhold til midtstillingen, som funksjon av tiden, beskrives av en harmonisk svingning. Fysikeren regner utslag til høyre som positive, og han regner alle avstander langs buen pendelen vil følge.
I alle forsøk slippes pendelen 15 cm til høyre for midtstillingen, og den bruker 10 sekunder til den er tilbake i høyre ytterposisjon.
Finn gjennomsnittsverdien, amplityden, perioden og akrofasen til den harmoniske svingningen $f(t)$ som fysikeren legger til grunn og skriv ned formelen for f.
Skisser grafen til f over tidsintervallet $[0, 30]$. Velg passe skala på aksene.

b) Fysikeren observerer at pendelen får kortere og kortere utslag, og vil teste observasjonene sine mot en annen matematisk modell. I følge denne modellen er posisjonen til pendelen i tiden t bestemt av

$$g(t) = (0,99)^{\frac{t}{10}} \cdot f(t)$$

hvor f er den harmoniske svingningen fra a).
Når $n \geq 1$ er et naturlig tall, la a_n være distansen pendelen tilbakelegger fra $t = 10 \cdot (n-1)$ til $t = 10 \cdot n$ i følge denne modellen.

Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

er en geometrisk rekke. Avgjør om rekken konvergerer, og finn i så fall summen.

Oppgave 2

a) La $A > 0$ være vilkårlig.
Forklar hvorfor

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot (\frac{A}{n})^{0,7} = \infty.$$

b) Når medlemmene av et skogeierlag skal fatte vedtak om felles tiltak, for eksempel som bygging av tømmertransportveier, vil stemmen til hver enkelt skogeier ha en vekt på $A^{0,7}$ hvor A er antall hektar skog hun/han eier. Hensikten med denne ordningen er at de store skogeierne skal ha større innflytelse enn de små, men ikke få dominere helt.
Forklar hvorfor en skogeier med familie kan oppnå større innflytelse hvis eiendommen stykkes opp og fordeles på flere familiemedlemmer (under forutsetning av at familiemedlemmene vil være eneige).
Vis at det er mulig at en skogeier som eier 90% av skogeierlagets samlede areal likevel ikke har absolutt flertall når beslutninger i skogeierlaget skal fattes.

Oppgave 3

Funksjonen

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$$

har både horisontale og vertikale asymptoter.

a) Finn alle asymptotene til f og lag en skisse av grafen.

b) Bestem hvor funksjonen

$$g(x) = \ln(f(x))$$

er definert og bestem alle horisontale og vertikale asymptoter til g.
Tegn en skisse av grafen til g.

Oppgave 4 [Dette er en omarbeiding av oppgave 5.11.4 i Læreboka]

a) $S = 4\pi r^2$ og $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ er overflaten og volumet av en kule med radius r.
Plott punktene $(\log S, \log V)$ i x-y-planet for noen verdier av r, for eksempel $r = 5$, 9, 13 og 20.
Hva legger du merke til, og hva er forklaringen på det du ser?

b) Tenk deg n figurer i planet med forskjellig størrelse, men med samme form. La $O_1, \ldots, O_n$ og $A_1, \ldots, A_n$ være henholdsvis omkrets og areal av figurene.
Forklar hvorfor alle parene $(\log O_i, \log A_i)$ ligger på samme linje. Hva er stigningstallet til linja.
Hvilken informasjon ligger i det punktet hvor linja skjærer y-aksen?

SLUTT