Differensiallikninger og modellering

Kompendium 3 i MAT1001 Matematikk 1

Høsten 2008

Inger Christin Borge

Matematisk institutt, UiO

Forord

Trilogien avsluttes (på én høst), og du tar nå fatt på Kompendium 3 i MAT1001 som tar for seg det tredje temaet i kurset:

3) Differensiallikninger og modellering (herunder derivasjon, integrasjon, eksponential-, logaritme-, og trigonometriske funksjoner).

Vi fortsetter å bake inn matematikken du har med fra videregående i en større sammenheng, og i dette temaet vil det spesielt dukke opp kjente funksjoner som vi skal bygge videre på. Sørg fortsatt for å repetere stoff fra videregående så fort det dukker opp ting du føler du ikke husker godt nok!

Løsningene til differensiallikninger (forkortet difflikninger) er funksjoner, og i Kapittel 1 ser vi litt nærmere på ulike typer funksjoner. Kapittel 2 starter med begrepet derivering som gjør oss i stand til å definere hva difflikninger er. Deretter kommer antideriveringsteknikker som vi skal trenge for å løse visse typer difflikninger. Disse difflikningene tar vi så for oss i tur og orden i Kapittel 3, og i Kapittel 4 settes de inn i en modelleringssammenheng, dvs. vi ser på noen av de utallige anvendelsene av difflikninger.

Underveis i teksten gis det mange eksempler, og du vil fortsatt bli bedt om å fullføre regninger og tegne tegninger. Gjør dette etterhvert som du leser teksten! Som de andre kompendiene er også dette skrevet omstendelig, uten å feie for mye under teppet, og det er som vanlig meget lurt å lese kompendiet (bruksanvisningen) før du går igang med oppgavene.

Oppgavesamlingen finner du bak i kompendiet sammen med mange tidligere eksamensoppgaver, som kommer i kronologisk rekkefølge. Oppgavene varierer i vanskelighetsgrad, og noen er markert 'Ekstra vanskelig'.

Vårt motto er som før: Jobb med alle oppgavene og søk hjelp etterhvert! Dette kompendiet vil trekke tråder til de tidligere kompendiene, og dermed lage en helhet av kurset. Vi håper at du vil sitte igjen med en matematisk

verktøykasse.
Fortsatt lykke til!

Jeg ønsker fortsatt å takke: Erik Bédos, Arne B. Sletsjøe og Elisabeth Seland (kontinuerlige innspill og kommentarer), Dina Haraldsson (hjelp med tidligere eksamensoppgaver), Kari T. Hylland (hjelp med treningsoppgaver) og Tom Lindstrøm (oppgave-innspill). Tusen takk alle sammen! I tillegg takk til Kjell Andresen på Usit og Olav Gravir Imenes for data- og programvareløsninger og Andrea Hofmann for kommentarer til Utøya-heftet (som utgjør deler av dette kompendiet).

Send gjerne trykkfeil og kommentarer til ingerbo@math.uio.no

Blindern, september 2008
Inger Christin Borge

Innhold

Notasjon

$\{\}$	mengde
$\in$	element i
$\mathbb{N}$	de naturlige tallene 1,2,3, ...
$\mathbb{Z}$	de hele tallene $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
$\mathbb{Q}$	de rasjonale tallene (brøker)
$\mathbb{R}$	de reelle tallene (tallinjen)
	med ordet 'tall' menes et reelt tall
$\mathbb{R}^2$	det reelle planet
$\mathbb{R}^3$	det reelle rommet
$\mathbb{R}^n$	det n-dimensjonale rommet
$\mathbb{C}$	de komplekse tallene
$\square$	avslutter et *Bevis*
$\blacksquare$	avslutter et **Eksempel** eller en **Bemerkning**

Kapittel 1

Funksjoner

Kurset MAT1001 dreier seg kort sagt om å lage matematiske problemer av virkeligheten og deretter løse problemene. Hittil i kurset har vi allerede møtt mange problemer, og de har så langt latt seg løse ved hjelp av lineære likningssystemer og/eller differenslikninger.

I dette kompendiet skal vi se på problemer der vi vil trenge en annen type likninger, nemlig differensiallikninger (forkortet: difflikninger) der 'den ukjente' er en *funksjon*.

1.1 Definisjoner

Med en *funksjon* skal vi mene følgende:

Definisjon 1.1 *En funksjon er en regel f som til ethvert element i en mengde (kalt definisjonsmengden D_f) gir oss ett og bare ett element (kalt en verdi) i en annen mengde.*

Eksempel 1.2 Regelen som til hver MAT1001-student gir oss høyden til den studenten er en funksjon (siden hver student har kun en eneste høyde).

Regelen som til hver mulig høyde blant MAT1001-studentene gir oss student(ene) som har denne høyden, er ikke en funksjon (siden flere studenter vil med all sannsynlighet ha samme høyde, og hver høyde vil dermed ikke gi ett eneste element/student). ■

Bemerkning 1.3 Tallfølgene vi møtte i Kompendium 2 kan tenkes på som funksjoner der definisjonsmengden er de naturlige tallene (og som oftest har vi hatt med 0 i tillegg): for hvert naturlige tall n (også når $n = 0$) gir en tallfølge $\{x_n\}$ oss verdien x_n. Vi sier at en tallfølge er en *diskret* funksjon. ■

Funksjoner er gjerne beskrevet ved hjelp av symboler. Vi skal se på funksjoner der definisjonsmengden består av reelle tall, og vi sier at vi ser på **funksjoner i én (reell) *variabel***. Denne variabelen skal vi ofte kalle x, men etterhvert også t (for tid).

For ethvert element $x \in D_f$, skriver vi verdien til x som $f(x)$, og vi angir gjerne en funksjon ved å skrive opp et uttrykk for $f(x)$.

Eksempel 1.4 Funksjonen f gitt ved $f(x) = |x|$ er regelen som til hver $x \in \mathbb{R}$ gir oss absoluttverdien av x. Funksjonen f går under navnet *absoluttverdifunksjonen*. Ved definisjonen av absoluttverdi, kan f også skrives som

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

■

De funksjonene vi skal jobbe med vil ha **en delmengde av $\mathbb{R}$ som definisjonsmengde**, og ofte vil definisjonsmengden være hele $\mathbb{R}$. **Hvis ikke definisjonsmengden er oppgitt er det underforstått at funksjonen er definert for alle verdier der funksjonsuttrykket gir mening.**

Eksempel 1.5 Funksjonen f gitt ved $f(x) = |x|$ har $D_f = \mathbb{R}$.

Funksjonen g gitt ved

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

gir ikke mening når $x = 0$ (når nevneren er lik 0), dermed er $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (leses '$\mathbb{R}$ tatt vekk 0'). ■

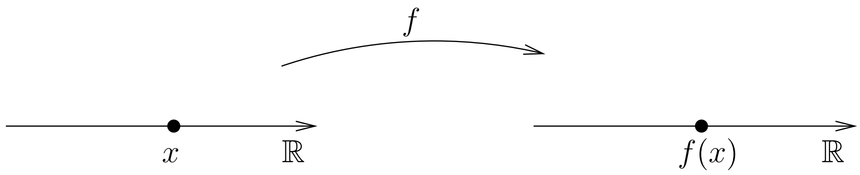
Alle funksjoner vi skal studere er reelle, dvs. at funksjonsverdiene er reelle. Vi sier at 'f går fra D_f inn i $\mathbb{R}$' og skriver

$$f \colon D_f \to \mathbb{R}.$$

Hvis $D_f = \mathbb{R}$ skriver vi dermed

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

som kan illustreres slik

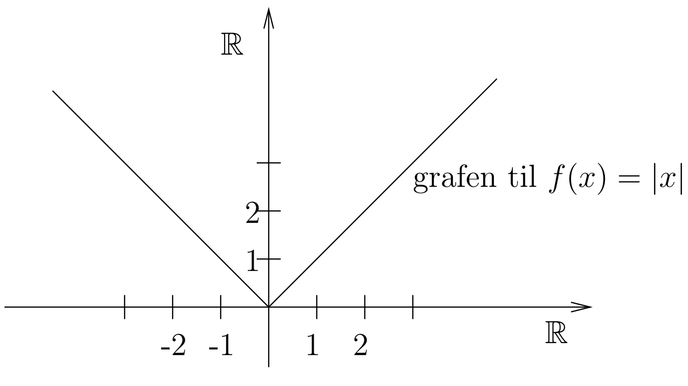


Definisjon 1.6 *Mengden av alle verdiene til en funksjon f kalles* verdimengden *til funksjonen og skrives*

$$V_f = \{f(x)\colon x \in D_f\}.$$

Grafen til en funksjon $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ er mengden av alle punkter $(x, f(x))$ i planet $\mathbb{R}^2$ der x gjennomløper D_f.

Eksempel 1.7 Verdimengden til absoluttverdifunksjonen f i Eksempel 1.4 er intervallet fra og med 0 og oppover, dvs. $V_f = [0, \infty)$. Grafen til f utgjør alle punktene på linja $-x$ når $x < 0$, og alle punktene på linja x når $x \geq 0$, som gir tegningen (husk at linjene fortsetter 'i det uendelige' i hver retning)



■

Et grunnleggende og viktig begrep for funksjoner er *kontinuitet*. Som dere er kjent med fra 2MX, kan vi bruke grafen til f for å si hva det vil si at funksjonen f er kontinuerlig.

Definisjon 1.8 *En funksjon f er kontinuerlig i et punkt $a \in D_f$ hvis grafen til f 'henger sammen' i punktet $(a, f(a))$. Hvis f er kontinuerlig for alle punkter $a \in D_f$ sier vi at f er kontinuerlig.*

Bemerkning 1.9 Det at grafen til f 'henger sammen' i punktet $(a, f(a))$ betyr litt mer presist at bare vi ser på punkter nære nok a, så vil funksjonsverdiene i disse punktene være så nære $f(a)$ vi bare vil. ■

Eksempel 1.10 Vi ser av grafen til absoluttverdifunksjonen i Eksempel 1.7 at $f(x) = |x|$ er kontinuerlig i alle punkter i definisjonsmengden ($D_f = \mathbb{R}$), så f er kontinuerlig.

Spesielt er absoluttverdifunksjonen kontinuerlig i punktet $x = 2$. Det betyr at vi kan få alle funksjonsverdiene til f i punktene i nærheten av 2 til å være så nærme $f(2) = 2$ vi bare vil, bare punktene vi ser på er nærme nok 2. For eksempel hvis vi ønsker at alle funksjonsverdiene skal ha avstand høyst $\frac{1}{100}$ til $f(2)$, kan vi få til dette for punktene med avstand mindre enn $\frac{1}{100}$ til $x = 2$. ■

1.2 Om anvendelser

Som for tallfølger er vi fortsatt interesserte i å studere ulike fenomener, og nå ved hjelp av funksjoner. Et helt sentralt begrep i studie av ulike fenomener er **tid**.

Anvendelsene vi så på for tallfølger kalte vi diskrete, siden vi her studerte fenomener der det var naturlig å se på adskilte tidsrom kalt generasjoner, og vi snakket om tilstanden til et fenomen ved tiden n der $n \in \mathbb{N}$.

Ofte er det ikke naturlig å studere et fenomen hver generasjon, men heller se på tilstanden til fenomenet *for et hvilket som helst tidspunkt t* der $t \in \mathbb{R}$ (så for eksempel kan vi se på tilstanden 2.73 dager eller 1.5 måneder etter et visst startidspunkt). Da er vi over i kontinuerlige anvendelser, der (kontinuerlige) funksjoner kommer inn.

Skillet mellom tallfølger og kontinuerlige funksjoner ligger altså i hva definisjonsmengden er: For tallfølger/diskrete funksjoner er den $\mathbb{N}$, mens for kontinuerlige funksjoner har vi et intervall i $\mathbb{R}$.

Legg merke til at man ofte kan 'velge' om man vil studere et fenomen diskret eller kontinuerlig. Da stilles det spørsmål som 'Kan vi introdusere diskret tid i dette problemet?' (det kunne vi for eksempel for nerveceller i Kompendium 2 pga. synapsemekanismen).

Dere har møtt mange funksjoner på videregående, og vi skal nå kort ta for oss definisjons- og verdimengde samt grafer og kontinuitet for disse kjente funksjonene og noen flere funksjoner som vil dukke opp i dette kompendiet. Spesielt i forbindelse med anvendelser vil vi også være interesserte i hva som skjer med verdiene $f(x)$ når x blir stor (hva som skjer når tiden går hvis x måler tid), dvs. hva grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

er. Vi sier derfor noe om dette også.

Ulike funksjoner oppfører seg forskjellig og denne oppførselen brukes til å studere ulike fenomener. Hvilke funksjoner som brukes til hva (noe som absolutt ikke er opplagt) skal vi se litt nærmere på i Kapittel 4, men vi skal allerede nå gi noen eksempler på hva slags fenomener som gir opphav til ulike funksjoner.

1.3 Polynomfunksjoner

La $n \in \mathbb{N}$ (eller $n = 0$). Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

der $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ er reelle konstanter, $a_n \neq 0$, kalles en *polynomfunksjon* av grad n, eller en *n-tegradsfunksjon*.

For eksempel er $f(x) = 3x^5 - 4x + 2$ en femtegradsfunksjon ($n = 5$, $a_5 = 3, a_4 = a_3 = a_2 = 0, a_1 = -4$ og $a_0 = 2$), mens $f(x) = 3x^2$ er en andregradsfunksjon.

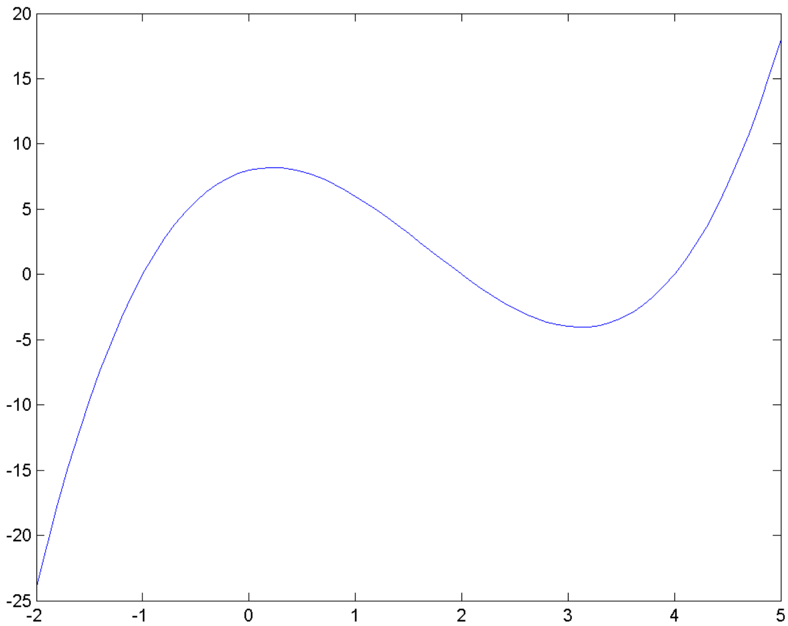
Spesielt kalles polynomfunksjonene av grad 0 *konstante funksjoner*. Videre kaller vi polynomfunksjoner av grad 1 for *lineære funksjoner* og polynomfunksjoner av grad 2 (andregradsfunksjoner) for *kvadratiske funksjoner*. Kjære barn har mange navn.

Definisjonsmengden til polynomfunksjoner er $\mathbb{R}$, mens verdimengden vil variere. For eksempel vet vi at andregradsfunksjoner har en maksimum- eller minimumsverdi, og verdimengden blir da henholdsvis $(-\infty, \text{maksverdi}]$ eller $[\text{minverdi}, \infty)$.

Grafen til en konstant funksjon er en rett linje med stigningstall lik 0 og grafen til en lineær funksjon er en rett linje med stigningstall forskjellig fra 0. Grafen til en kvadratisk funksjon har et eget navn og kalles en *parabel*.

Her er et eksempel på grafen til en tredjegradsfunksjon: Vi har tegnet grafen til f gitt ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \quad (\text{ med } D_f = [-2, 5]) :$$



Bemerkning 1.11 Det vil dukke opp flere grafer utover i kompendiet, og for å tegne disse bruker vi programmet MATLAB. Det er dermed lurt å bli vant til hvordan koordinatsystemet ser ut på tegninger fra MATLAB med en gang (finn origo!). (Noen ganger vil vi tegne inn et rutenett.) ■

Polynomfunksjoner er kontinuerlige funksjoner.

Videre har vi at for en polynomfunksjon f som er gitt ved

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

er

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } a_n > 0 \\ -\infty & \text{for } a_n < 0 \end{cases}$$

(tenk over dette!). For eksempel er

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = \infty$$

($n = 3$, $a_3 = 1$).

Det er mange fenomener som kan gi opphav til polynomfunksjoner, bl.a vil dere se (i oppgavene) at massen til en møllkule $M(t)$ som en funksjon av tiden t er gitt ved en polynomfunksjon. Likeledes kan antall laks $L(t)$ i en innsjø ved tiden t beskrives ved en polynomfunksjon (alt under visse antagelser).

1.4 Rasjonale funksjoner

En funksjon f gitt ved

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der p og q er polynomfunksjoner og graden til $q(x)$ er større enn 0 kalles en *rasjonal funksjon*.

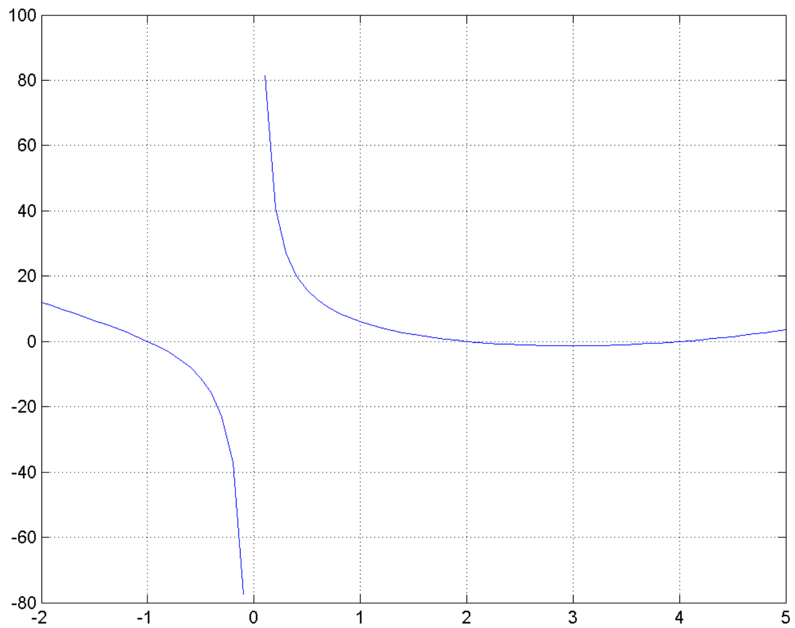
Vi vet at definisjonsmengden til polynomfunksjoner er hele $\mathbb{R}$, så definisjonsmengden til en rasjonal funksjon vil være de $x \in \mathbb{R}$ slik at nevneren $q(x)$ er forskjellig fra 0, dvs.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon q(x) \neq 0\}.$$

Verdimengden til en rasjonal funksjon vil variere. For eksempel, la

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x}.$$

Vi tegner grafen til f på intervallet $[-2, 5]$ (med $x \neq 0$):



Det ser ut til at $V_f = \mathbb{R}$ når vi lar $D_f = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq 0\}$.

Hvis vi imidlertid tegner grafen til $g(x) = \frac{1}{x^2}$ (gjør det på kalkulator!), ser vi at $V_g = [0, \infty)$.

I begge tilfeller ser vi en spesiell oppførsel rundt punktet $x = 0$. Hverken f eller g er definert for $x = 0$ siden det gir at nevneren i funksjonsuttrykket er 0. Det må derfor undersøkes spesielt hva som skjer rundt punktene der nevneren blir 0. For funksjonene f og g setter vi inn verdier for x i nærheten av 0, og ser hva det gir (bruk kalkulator). Matematisk ser vi da på grenseverdien av funksjonsuttrykket når x nærmer seg 0 fra venstre ($x \to 0^-$) og når x nærmer seg 0 fra høyre ($x \to 0^+$). Da ser det ut til at

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x} = -\infty$$

og

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x} = \infty$$

mens

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

I begge tilfeller sier vi at '$x = 0$ er en vertikal *asymptote* for funksjonen når x går mot 0'.

For rasjonale funksjoner kan det være nyttig å minne om skrivemåten

$$\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n},} \tag{1.1}$$

slik at for eksempel uttrykket for funksjonen g gitt ved $g(x) = \frac{1}{x^2}$ kan skrives $g(x) = x^{-2}$.

Rasjonale funksjoner er kontinuerlige i hele sin definisjonsmengde.

Hva med grenseverdien til en rasjonal funksjon når $x \to \infty$? La f være en rasjonal funksjon skrevet som

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

- Hvis $n > m$ er

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{for } \frac{a_n}{b_m} < 0. \end{cases}$$

- Hvis $n = m$ er

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \quad (= \frac{a_n}{b_n}).$$

- Hvis $n < m$ er

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

For eksempel er

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x} = \infty$$

($n = 3$, $m = 1$ og $a_3 = 1$), mens

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

($n = 0$, $m = 2$).

I våre anvendelser vil rasjonale funksjoner først og fremst dukke opp som uttrykk for hvordan endel fenomener forandrer seg. Men mange fenomener vil også i seg selv gi opphav til rasjonale funksjoner. For eksempel kan man tenke seg en stein som kastes i et (dypt...) vann. Et mulig uttrykk $d(t)$ for hvor dypt steinen er ved tiden t kan være

$$d(t) = \frac{4}{4+t^2} + 0.8t - 1$$

(sum av en rasjonal funksjon og en polynomfunksjon, som kan gjøres rasjonal ved å sette på fellesnevner).

1.5 Rotfunksjoner

Funksjoner f på formen

$$f(x) = Cx^{\frac{m}{n}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

der $m, n \in \mathbb{N}$ og $n \neq 1$ ikke går opp i m kalles *rotfunksjoner*. Lineære kombinasjoner av slike funksjoner kalles også rotfunksjoner.

For eksempel har vi $f(x) = 3x^{\frac{3}{2}}$ og $g(x) = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{7}{5}}$ ($g(x)$ er en lineær kombinasjon av $x^{\frac{4}{3}}$ og $x^{\frac{7}{5}}$).

I denne forbindelsen minner vi om skrivemåten

$$\boxed{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.} \tag{1.2}$$

Husk at n-te røttene til et tall a er de tallene som opphøyd i n-te potens gir a.

Siden vi ikke kan ta partallsrøtter av negative tall (når vi jobber over de reelle tall, slik vi skal gjøre for funksjoner), ser vi at er definisjonsmengden til $f(x) = Cx^{\frac{m}{n}}$ vil variere alt etter hva m og n er:

$$D_f = \begin{cases} [0,\infty) & \text{for } m \text{ et oddetall og } n \text{ et partall} \\ \mathbb{R} & \text{ellers} \end{cases}$$

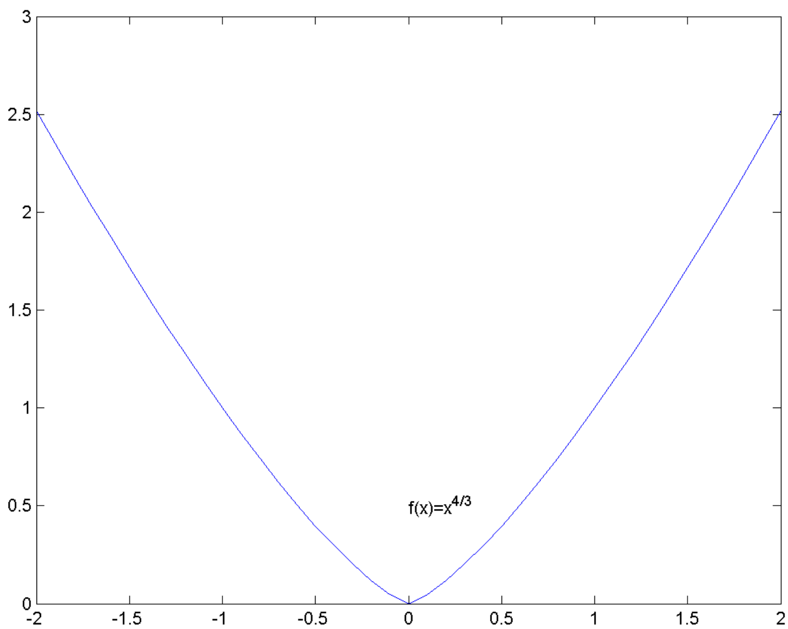
Definisjonsmengden til en lineær kombinasjon av slike uttrykk vil være den 'minste' av definisjonsmengdene til hvert av leddene. For eksempel er definisjonsmengden til $g(x) = x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{5}{2}}$ lik $D_g = [0,\infty)$ selv om uttrykket $x^{\frac{4}{3}}$ er definert for alle $x \in \mathbb{R}$, siden $x^{\frac{5}{2}}$ kun er definert for $x \in [0,\infty)$.

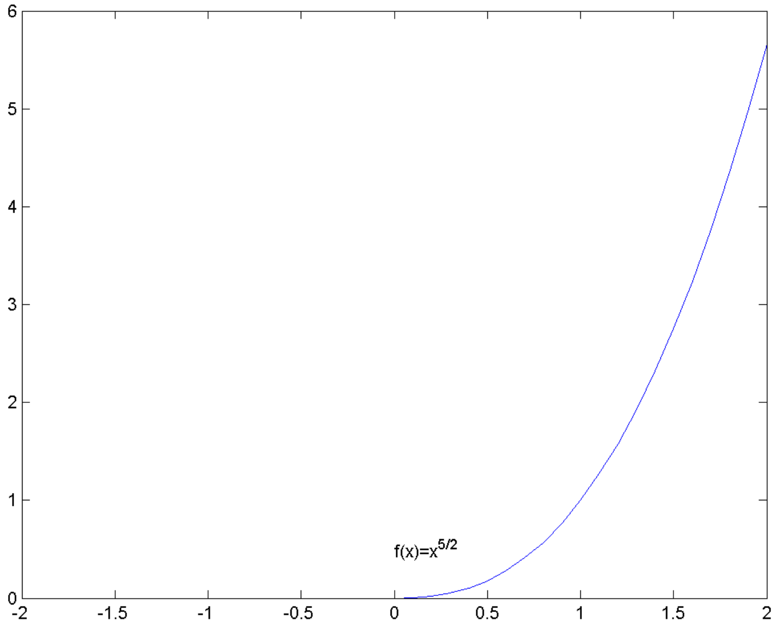
Verdimengden til $f(x) = Cx^{\frac{m}{n}}$ vil på lignende måte variere med hva m og n er, og vi får at

$$V_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{for } m \text{ og } n \text{ oddetall} \\ [0,\infty) & \text{ellers og } C \geq 0 \\ (-\infty, 0] & \text{ellers og } C \leq 0 \end{cases}$$

Verdimengden til en lineær kombinasjon av slike uttrykk vil være den 'største' av verdimengdene til hvert av leddene.

Her er et par eksempler på grafer av rotfunksjoner:





Rotfunksjoner er kontinuerlige i hele sin definisjonsmengde.

Vi har grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} Cx^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} \infty & C > 0 \\ -\infty & C < 0 \\ 0 & C = 0. \end{cases}$$

Som for rasjonale funksjoner vil rotfunksjoner først og fremst dukke opp i mellomregningene i våre anvendelser, men et eksempel på et fenomen som gir opphav til en rotfunksjon er ferden til en ballong: En mulig beskrivelse av høyden $h(t)$ til en ballong ved tiden t er

$$h(t) = 0.5 + \frac{1}{10}\sqrt[3]{t - 125}.$$

(tegn grafen!) (en sum av en konstant funksjon og en rotfunksjon).

1.6 Eksponential- og logaritmefunksjoner

Eksponential- og logaritmefunksjoner er de funksjonene som vil dukke opp oftest i dette kompendiet, og i denne seksjonen har vi samlet (kjent) informasjon om disse funksjonene:

Eksponentialfunksjoner er funksjoner der variabelen er en eksponent. En *eksponentialfunksjon* f med *grunntall* a kan skrives på formen

$$f(x) = Ca^x, \quad C \in \mathbb{R}$$

der $a > 0$.

Til en eksponentialfunksjon med grunntall a hører en *logaritmefunksjon* med samme grunntall gitt ved $g(x) = \log_a x$. Funksjonsverdien $g(x)$ er det tallet vi må opphøye a i for å få x, dvs.

$$a^{\log_a x} = x.$$

Vi skal først og fremst bruke grunntallet $e \approx 2.71828$ med tilhørende logaritme $\log_e$, som vi angir ved ln og kaller *den naturlige logaritmen*. Vi har altså

$$e^{\ln x} = x.$$

Grunnen til at vi velger å jobbe med e^x og $\ln x$ vil komme frem når vi kommer til derivasjon/antiderivasjon.

Potensregler for eksponentialfunksjoner gir følgende logaritmeregler som vi vil bruke mye $(a, b > 0)$:

- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln a^b = b \ln a$

Funksjonene f og g gitt ved

$$f(x) = e^x \quad \text{og } g(x) = \ln x$$

har definisjons- og verdimengder

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} & V_f &= (0,\infty) \\ D_g &= (0,\infty) & V_g &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Merk spesielt at verdimengden til e^x er positive tall og (dermed) at uttrykket $\ln x$ kun gir mening for positive x (siden det er tallet vi må opphøye e i for å få tallet). Det betyr at i tilfeller der vi trenger den naturlige logaritmen til en variabel som kan være negativ løser vi det ved å bruke absoluttverdi. Dermed vil for eksempel funksjonen $h(x) = \ln|x|$ ha definisjonsmengde $D_h = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Tegn gjerne noen grafer for å minne deg selv på hvordan eksponential- og logaritmefunksjoner oppfører seg. Tegn for eksempel e^{3x}, e^{-x} og $\ln|x|$.

Eksponential- og logaritmefunksjoner er kontinuerlige i hele sine definisjonsmengder.

Vi vil ofte støte på eksponentialfunksjoner på formen e^{rx} der $r \in \mathbb{R}$ og vi har (for $C \neq 0$):

$$\lim_{x\to\infty} Ce^{rx} = \begin{cases} C & r = 0 \\ \infty & r > 0 \text{ og } C > 0 \\ -\infty & r > 0 \text{ og } C < 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

(overbevis deg selv!). Vi minner også om at

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Videre er

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

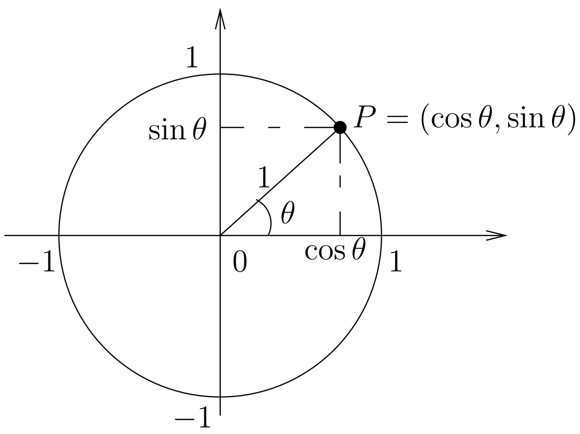
Vi vil se utallige eksempler på anvendelser der eksponential- og logaritmefunksjoner dukker opp. Foreløpig nevner vi i fleng temperaturfunksjoner, kunnskapsfunksjoner, bensinfunksjoner, befolkningsfunksjoner og rentefunksjoner.

1.7 Trigonometriske funksjoner

Om dere har vært litt kjent med de funksjonene vi har sett på til nå, vil nok mye i denne seksjonen være nytt for de fleste.

Det fins mange funksjoner (iallefall 12) som kalles *trigonometriske*, og som stammer fra vinkelmåling i rettvinklede trekanter. Vi skal først og fremst konsentrere oss om cosinusfunksjonen og sinusfunksjonen.

Vi definerer (fra Kompendium 2) funksjonene $\cos\theta$ og $\sin\theta$ som til hver vinkel $\theta \in \mathbb{R}$ gir oss henholdvis x- og y-koordinaten til det tilhørende punktet P på enhetssirkelen:



Hvis vi setter (og bytter variabelnavn til x):

$$f(x) = \cos x \quad \text{og } g(x) = \sin x$$

har vi

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$
$$V_f = V_g = [-1, 1]$$

(overbevis deg selv!). Vi tar også med en tredje trigonometrisk funksjon kalt *tangens*. Tangensverdien til $x \in \mathbb{R}$, skrevet $\tan x$, er definert som forholdet mellom $\sin x$ og $\cos x$, dvs.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definisjonsmengden til tangensfunksjonen er alle $x \in \mathbb{R}$ der $\cos x \neq 0$. Siden $\cos x = 0$ for $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ der $k \in \mathbb{Z}$, får vi at med

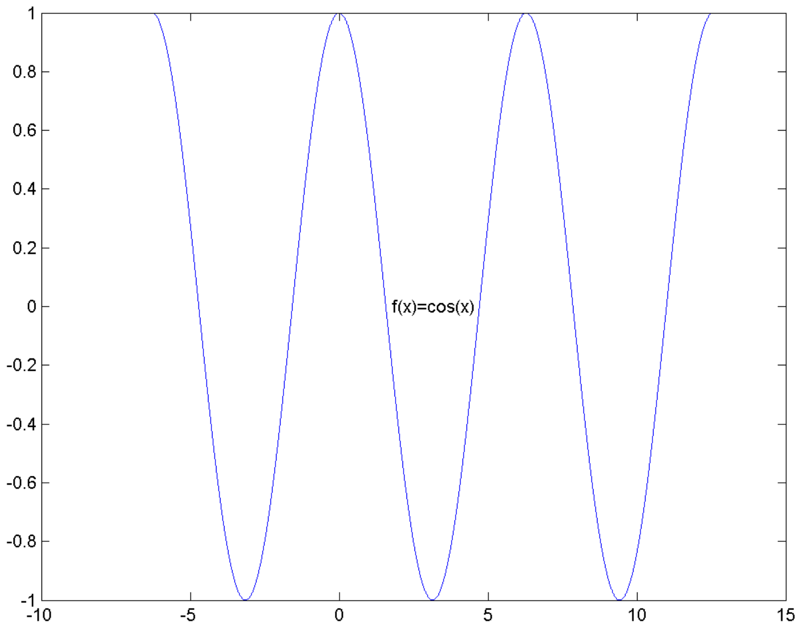
$$h(x) = \tan x$$

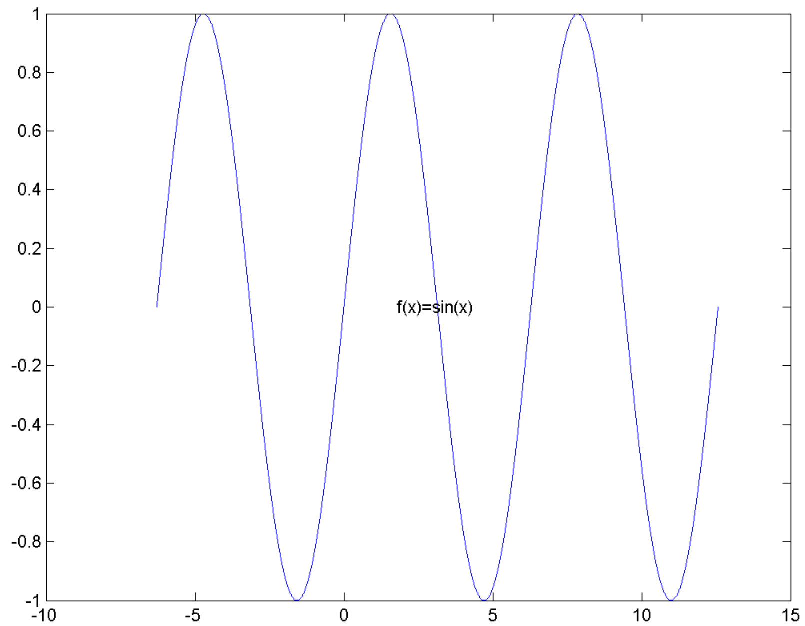
så er

$$\begin{aligned} D_h &= \mathbb{R}\backslash\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ for alle } k \in \mathbb{Z}\} \\ V_h &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

(tegn $\tan x$ på kalkulator!).

Her er grafene til $\cos x$ og $\sin x$ (kalt henholdsvis *cosinuskurven* og *sinuskurven*) for $x \in [-2\pi, 4\pi]$:





Siden cosinus og sinus følger et punkt som går rundt og rundt på enhetssirkelen, vil verdiene gjentas for hvert omløp, og cosinus og sinus er således eksempler på *periodiske* funksjoner.

Både cosinus og sinus har periode lik 2π, dvs. at for hvert heltallsmultippel av 2π gjentas de samme verdiene siden

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin x &= \sin(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

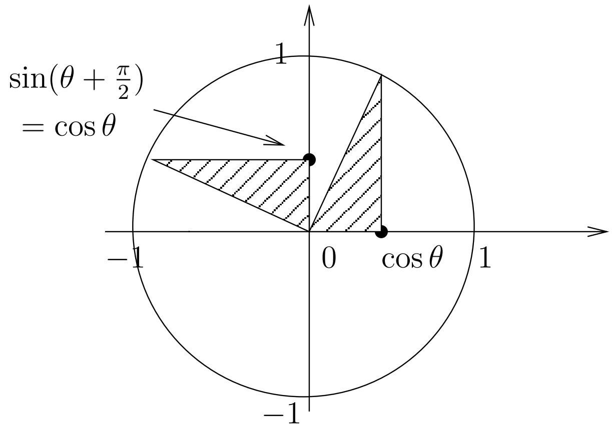
Dessuten 'svinger' cosinus- og sinusverdiene hele tiden mellom minimumsverdien -1 og maksimumsverdien 1. Cosinus og sinus er eksempler på det vi kaller *harmoniske* svingninger. En harmonisk svingning er en periodisk bevegelse som kan beskrives ved hjelp av en cosinus- eller sinusfunksjon (med tiden som variabel). Vi skal nå nærme oss en presis definisjon av harmonisk svingning.

Grunnen til at vi kan beskrive en harmonisk svingning med en cosinus- eller en sinusfunksjon er at det er en periodisk sammenheng mellom cosinus og sinus:

Fra grafene ser vi at sinuskurven følger etter cosinuskurven: Når $x = \frac{\pi}{2}$ starter sinus der cosinus var for $x = 0$, og de følger hverandre med en såkalt *faseforskyvning* på $\frac{\pi}{2}$. Vi har altså

$$\boxed{\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x,} \tag{1.3}$$

noe som også kan sees fra følgende figur der trekanten i 1. kvadrant er rotert $\frac{\pi}{2}$ mot klokka:



(sjekk!).

Siden harmoniske svingninger vil dukke opp senere i kurset (og i studiet), trenger vi litt mer teori om dette. På grunn av (1.3) holder det å se på enten cosinus eller sinus, og vi velger svingningen $\underline{\cos x}$ (grunnen er at $\cos x$ har en topp for $x = 0$).

For å beskrive en **harmonisk svingning** har vi følgende begreper: en funksjon f i variabelen x som er en harmonisk svingning har en **maksimumsverdi** (forkortet maksverdi; en 'topp') og en **minimusverdi** (forkortet minverdi; en 'bunn'). For $\cos x$ er disse henholdsvis 1 og -1. I tillegg har en harmonisk svingning en

middelverdi, som er gjennomsnittet av maks- og minverdien for funksjonen/svingningen. Vi betegner middelverdien med A_0 (notasjon varierer). For $\cos x$ er $A_0 = 0$.

amplityde, det maksimale utslaget/avstanden fra middelverdien. Amplityden betegnes med A, der $A \geq 0$. For $\cos x$ er $A = 1$.

periode, som er avstanden mellom to etterfølgende topper, ofte betegnet med T, der $T > 0$. I hver periode har altså svingningen én topp og én bunn, og det er perioden *med samme topp og bunn* som hele tiden gjentas for en harmonisk svingning. For $\cos x$ er $T = 2\pi$.

sirkelfrekvens, et begrep som henger sammen med perioden, ofte betegnet med ω (leses 'omega') og definert som

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Sirkelfrekvensen sier noe om hvor 'raske' svingninger vi har: Jo kortere periodene er (kort avstand mellom toppene), jo høyere sirkelfrekvens. Hvis det er langt mellom toppene, har vi 'trege' svingninger, og sirkelfrekvensen er 'liten'. For $\cos x$ er $\omega = 1$.

akrofase, som sier oss hvor toppen til svingningen i intervallet $[0, T)$ ligger, dvs. akrofasen er x-verdien der den første toppen til høyre for y-aksen befinner seg, og den betegnes ofte med x_0 (eller t_0 hvis variabelen er t). For $\cos x$ er $x_0 = 0$.

Bemerkning 1.12 Av de begrepene vi har innført er akrofasen det eneste begrepet som skiller $\cos x$ og $\sin x$: For $\sin x$ er $x_0 = \frac{\pi}{2}$. ■

Vi kan nå nærme oss den generelle formelen for en harmonisk svingning. Vi tar nå utgangspunkt i svingningen $\cos x$ og forandrer på den:

Forandre middelverdien fra 0 til A_0: Grafisk gjøres dette ved å flytte cosinuskurven vertikalt opp eller ned slik at den svinger rundt middelverdien A_0. Algebraisk (dvs. ved formelmanipulering) gjøres dette ved å legge A_0 til cosinus-uttrykket. Svingningen gitt ved

$$f(x) = A_0 + \cos x$$

har således middelverdi A_0.

Forandre amplityden fra 1 til A: Vi multipliserer cosinusuttrykket med verdien A, $A \geq 0$. Funksjonen

$$f(x) = A\cos x$$

er en harmonisk svingning med amplityde A. **Merk:** maks- og minverdiene forandres også til henholdsvis A og $-A$. Hvis vi har middelverdi A_0 og amplityde A, får vi maksimumsverdi lik A_0+A og minimumsverdi $A_0 - A$.

Forandre perioden fra 2π til T: Dvs. vi vil endre avstanden mellom toppene. Dette gjøres ved å multiplisere variabelen x med et passende tall. Hvis vi ønsker periode T, muliplisere vi med $\frac{2\pi}{T}$ (altså sirkelfrekvensen!). Svingingen

$$\cos(\frac{2\pi}{T}x)$$

har periode T (tenk over dette!). For eksempel er

$$\cos(\frac{2\pi}{3}x)$$

en harmonisk svingning med periode 3. (Her er det nok lettest å tenke følgende: faktoren foran variabelen er sirkelfrekvensen ω. Vi bruker så formelen $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dvs. perioden er $T = \frac{2\pi}{\omega}$.)

Forandre akrofasen fra 0 til x_0: Geometrisk gjøres dette ved å forskyve cosinuskurven horisontalt slik at første topp til høyre for y-aksen har x-verdi x_0. Algebraisk trekker vi x_0 fra variabelen x. Svingningen

$$\cos(x - x_0)$$

har dermed akrofase x_0. For eksempel har den harmoniske svingningen

$$\cos(x - 4)$$

akrofase $x_0 = 4$, dvs. at toppen i intervallet $[0, 2\pi)$ inntreffer for $x = 4$ (da er $\cos(4 - 4) = \cos 0 = 1$).

Vi setter nå alt dette sammen og får:

Definisjon 1.13 *Funksjonen f gitt ved*

$$\boxed{f(x) = A_0 + A\cos(\frac{2\pi}{T}(x - x_0)), \quad A \geq 0, T > 0} \tag{1.4}$$

kalles en harmonisk svingning med middelverdi A_0, amplityde A, periode T (dermed sirkelfrekvens $\frac{2\pi}{T}$) og akrofase x_0.

Eksempel 1.14 Den harmoniske svingningen

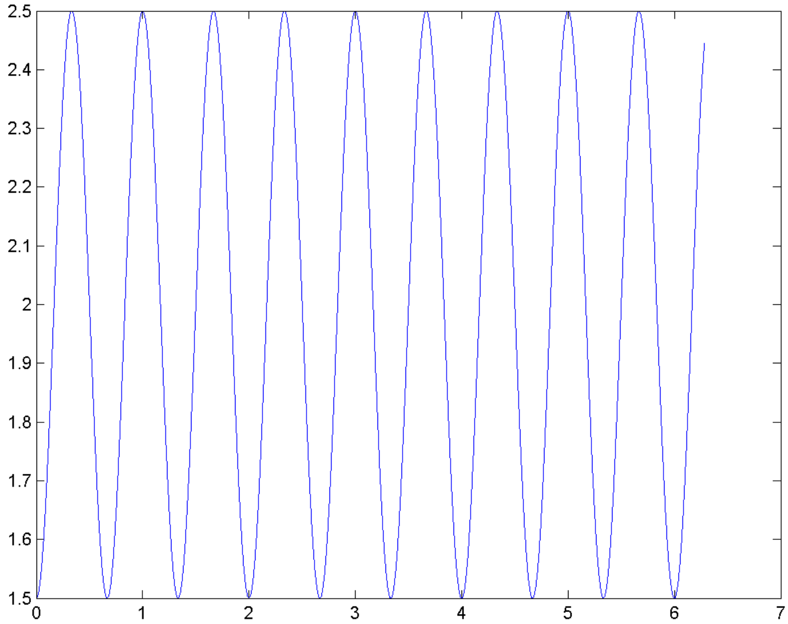
$$f(x) = 5 + 3\cos(\frac{\pi}{3}(x - 5))$$

har middelverdi 5, amplityde 3, periode lik 6 og akrofase 5 (sjekk og tegn grafen!). ■

Eksempel 1.15 Den harmoniske svingningen f med middelverdi 2, maksverdi lik $\frac{5}{2}$, periode $\frac{2}{3}$ og akrofase $\frac{1}{3}$ er gitt ved

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}\cos(3\pi(x - \frac{1}{3})).$$

Her er grafen for $x \in [0, 2\pi]$:



■

Eksempel 1.16 Den harmoniske svingningen f gitt ved

$$f(x) = 2 + \sin(x - 2)$$

har middelverdi 2, maksverdi lik 3, minverdi lik 1 (og amplityde 1) og periode 2π, men siden vi har en sinusfunksjon istedenfor cosinus er <u>ikke</u> akrofasen lik 2. For å finne akrofasen til denne svingningen må vi bruke at $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ og finne toppen i intervallet $[0, 2\pi)$. Maksverdien 3 for $f(x)$ oppnås når $\sin(x - 2)$ er 1. Siden $\sin(2 - (2 + \frac{\pi}{2})) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, er akrofasen lik

$$x_0 = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Alt dette kan også sees ved å observere at vi kan angi $f(x)$ på formen (1.4) slik:

$$f(x) = 2 + \cos(x - (2 + \frac{\pi}{2})).$$

■

La f være en harmonisk svingning. Fra uttrykket (1.4) ser vi at

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{ikke eksisterer}$$

siden verdien til f svinger (raskt eller sakte) mellom maks og min, og vil dermed aldri stabilisere seg.

Siden cosinus- og sinusfunksjoner beskriver periodiske og spesielt harmoniske svingninger, dukker disse funksjonene nettopp opp i studiet av fenomener som har en periodisk og svingete oppførsel, for eksempel vær, aksjer, temperatur, vannføring i en elv, konstruksjon av jordskjelvmålere, antall rever i et område og antall medlemmer i en forening.

I forbindelse med anvendelser vi skal se på senere tar vi også med en meget nyttig formel som sier at vi kan **summere harmoniske svingninger** med samme periode og få en ny harmonisk svingning!

$$C\cos(dx) + D\sin(dx) = A\cos(dx - \phi), \quad d, C, D \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

der $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ og ϕ er vinkelen i intervallet $[0, 2\pi)$ med

$$\cos\phi = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \quad \text{og} \quad \sin\phi = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}.$$

I (1.5) sier vi at vi skriver den harmoniske svingningen på *faseform* siden vi kan lese av akrofasen: Vi har

$$\cos(dx - \phi) = \cos(d(x - \frac{\phi}{d}))$$

så akrofasen er

$$x_0 = \frac{\phi}{d}.$$

For å vise (1.5) trenger vi blant annet formelen

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{1.6}$$

som du er bedt om å vise i Oppgave 11.

La oss gi en kort forklaring til (1.5): Vi ser på punktet (C, D) i planet (koordinatene i den rekkefølgen siden vi vil bruke formel (1.6)). Punktet ligger på en sirkel med radius $\sqrt{C^2+D^2}$ (ved Pythagoras), dermed er $\sqrt{C^2+D^2}$ amplityden til summen av svingningene. Vinkelen θ som punktet danner gir nettopp $\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}$ og $\sin\theta = \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}$ (tegn tegning!). Formel (1.6) gir nå faseformen (1.5).

Vi viser bruk av (1.5) på et eksempel:

Eksempel 1.17 I uttrykket $\cos x + \sin x$ er $C = 1$, $D = 1$ og $A = \sqrt{C^2+D^2} = \sqrt{2}$. Det gir $\phi = \frac{\pi}{4}$ (sjekk!) og ved (1.5) får vi at

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$$

(sjekk også ved å bruke (1.6)!). ■

1.8 Sammensatte funksjoner

Vi har nå tatt for oss de 'elementære funksjonene'. Disse kan multipliseres med konstanter og kan kombineres blant annet ved å adderes og multipliseres. De kan også 'settes sammen'. Alt for å lage nye funksjoner (som vi vil trenge for å beskrive fenomener vi vil studere).

Eksempel 1.18 Funksjonen

$$f(x) = e^{3x}\sin x + x^3$$

er summen av [en polynomfunksjon og produktet av en eksponentialfunksjon og en trigonometrisk funksjon].

Funksjonen

$$g(x) = e^{\sin x}$$

er *sammensetningen* av e^x og $\sin x$ der vi tenker på funksjonen $\sin x$ som variabelen i eksponentialfunksjonen e^x. ■

Husk forkortet skrivemåte når vi setter sammen logaritme- og trigonometriske funksjoner med potensfunkjoner, dvs.

$$\boxed{\ln^r x = (\ln x)^r, \quad \sin^r x = (\sin x)^r \quad \text{og} \;\; \cos^r x = (\cos x)^r, \qquad \text{der } r \in \mathbb{N}.}$$

I anvendelser er det en kombinasjon av funksjoner som vil dukke opp og egenskapene til disse kombinasjoner må studeres i hvert tilfelle. Vi merker oss imidlertid at definisjonsmengden blir 'den minste' av definisjonsmengden til de involverte funksjonene, mens verdimengden blir 'den største' av de involverte verdimengdene. Dessuten har vi følgende nyttige resultater for grenseverdier (når både $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to\infty} g(x)$ eksisterer):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) \pm \lim_{x\to\infty} g(x)\\
&\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = (\lim_{x\to\infty} f(x))(\lim_{x\to\infty} g(x))\\
&\lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \tfrac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} \quad (\text{forutsatt } \lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0).
\end{aligned}$$

1.9 Nå skal du kunne

- definisjonen av begrepet funksjon, dens definisjonsmengde, verdimengde og graf, og videre forklare hva det vil si at en funksjon er kontinuerlig
- finne definisjonsmengde, verdimengde og $\lim_{x\to\infty} f(x)$ for polynomfunksjoner, rasjonale funksjoner, rotfunksjoner, eksponential- og logaritmefunksjoner og trigonometriske funksjoner (herunder definere hva vi mener med slike funksjoner) og sammensetninger av disse funksjonene
- definisjonen av en harmonisk svingning, dens maks, min- og middelverdi, amplityde, periode, sirkelfrekvens og akrofase, og dermed gi den generelle formelen for en harmonisk svingning
- definisjon og utregning av faseform
- se frem til en spennende avslutning på MAT1001

Kapittel 2

Antiderivering

I dette og neste kapittel skal vi bli kjent med noen typer difflikninger og lære hvordan disse kan løses. Til dette trenger vi derivering og antiderivering.

2.1 Derivasjon

I Kapittel 1 har vi sett på ulike funksjoner som kan tenkes å beskrive ulike fenomener. Et sentralt begrep som fort dukker opp når vi studerer et fenomen (i tillegg til tid) er **forandring**. Alt forandres hele tiden. Ingenting er slik det var igår, eller for ett sekund siden.

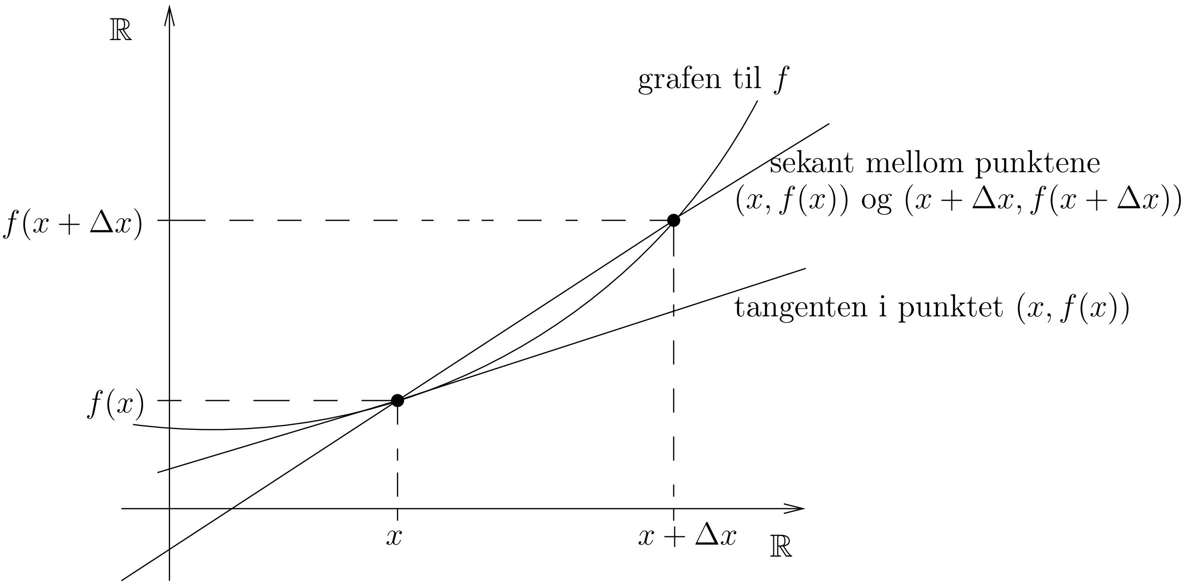
For en funksjon f kan vi se på grenseverdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

som måler den *'momentane forandringen'* til funksjonen f i punktet x. Når denne grenseverdien eksisterer sier vi at f er *deriverbar* i x og kaller (2.1) den *deriverte* til f i x, som skrives $f'(x)$.

Når vi lar x variere i D_f får vi en ny funksjon f', den deriverte til f, gitt ved $f'(x)$ for alle x der $f'(x)$ eksisterer.

Vi tar med tegningen som gjerne følger med (2.1):



Husk: En sekant til en graf er linjen som forbinder to punkter på grafen. Stigningstallet til sekanten mellom punktene $(x, f(x))$ og $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ er uttrykket

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Tangenten i et punkt på en graf er linjen som kun berører punktet og ingen andre punkter på grafen 'i umiddelbar nærhet'. Mer presist er tangenten til f i punktet $(x, f(x))$ definert som linjen gjennom $(x, f(x))$ med stigningstall $f'(x)$.

I de punktene hvor vi kan måle en forandring (dvs. når f er deriverbar) er forandringen gitt matematisk ved funksjonen f' der

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Geometrisk måles altså forandringen i et punkt ved hjelp av stigningstallet til tangenten i punktet.

Vi minner om følgende deriverte funksjoner fra 2MX og legger til et par regler:

- $(a)' = 0$ der $a \in \mathbb{R}$
- $(x^r)' = rx^{r-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \ a \in \mathbb{R}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Eksempel 2.1 Den deriverte funksjonen til

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

er

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

for $x > 0$. For $x = 0$ eksisterer ikke den deriverte. ■

Eksempel 2.2 Den deriverte funksjonen til

$$g(x) = x^{-\frac{2}{3}}, \quad x \neq 0$$

er

$$g'(x) = (x^{-\frac{2}{3}})' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}.$$

■

Når vi måler vinkler i radianer, kan det vises at:

- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\sin x)' = \cos x$

Se på grafene til $\cos x$ og $\sin x$ (i Seksjon 1.7): For hver x-verdi ser vi at forandringen til $\cos x$ er lik den negative sinusverdien i punktet, og forandringen til $\sin x$ er lik cosinusverdien i punktet.

La nå funksjonene f og g være deriverbare i punktet x. Da har vi følgende derivasjonsregler:

- Derivere en funksjon multiplisert med en konstant, $a \in \mathbb{R}$:

$$(af)'(x) = a \cdot f'(x)$$

- Derivere en sum: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Derivere en differanse: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- Derivere et produkt (produktregelen):

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

- Derivere en brøk (brøkregelen):

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0$$

- Derivere en sammensatt funksjon (*kjerneregelen*):
  Hvis $h(x) = f(g(x))$ og f i tillegg er deriverbar i $g(x)$, er

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Vi minner om at to størrelser a og b er *proporsjonale*, skrevet

$$a \propto b,$$

hvis forholdet mellom dem er konstant, dvs. $\frac{a}{b}$ er konstant lik en $r \in \mathbb{R}$, så

$$a = rb, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 2.3 Vi legger spesielt merke til at kjerneregelen gir

$$(e^{rx})' = re^{rx}, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

dvs. $(e^{rx})'$ og e^{rx} er proporsjonale størrelser for hver verdi av x. ■

Eksempel 2.4 Vi kan bruke brøkregelen og finne den deriverte funksjonen til $\tan x$:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= (\tfrac{\sin x}{\cos x})' \\ &= \tfrac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \tfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tfrac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

■

Eksempel 2.5 La f være gitt ved

$$f(x) = (\ln \sqrt{x})^3, \quad x > 0.$$

Vi vil derivere f, og ser på to alternative utregninger:
Alternativ 1: Funksjonen f er satt sammen av tre funksjoner; tredjegradsfunksjonen x^3, logaritmefunksjonen $\ln x$ og rotfunksjonen $\sqrt{x}$, der $\ln \sqrt{x}$ er kjernen i tredjegradsfunksjonen og $\sqrt{x}$ er kjernen i logaritmefunksjonen. Hvis vi skriver

$$\begin{aligned}r(x) &= x^3 \\ s(x) &= \ln x \\ t(x) &= \sqrt{x},\end{aligned}$$

er dermed

$$s(t(x)) = \ln \sqrt{x}$$

og

$$r(s(t(x))) = (\ln \sqrt{x})^3 = f(x)$$

(vær sikker på dette!). Ved bl.a. å bruke kjerneregelen to ganger får vi derfor

$$\begin{aligned}
f'(x) &= r'(s(t(x))) \cdot (s(t(x)))' \\
&= r'(s(t(x))) \cdot s'(t(x)) \cdot t'(x) \\
&= 3(\ln \sqrt{x})^2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \tfrac{3}{2x}(\ln \sqrt{x})^2 \\
&= \tfrac{3}{2x}(\tfrac{1}{2} \ln x)^2 \\
&= \tfrac{3}{8x} \ln^2 x.
\end{aligned}$$

Alternativ 2: Ved å bruke logaritmeregler først, trenger vi kun å bruke kjerneregelen én gang:

$$f(x) = (\ln \sqrt{x})^3 = (\frac{1}{2} \ln x)^3 = \frac{1}{8} \ln^3 x$$

så

$$f'(x) = \frac{3}{8}(\ln^2 x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{8x} \ln^2 x.$$

■

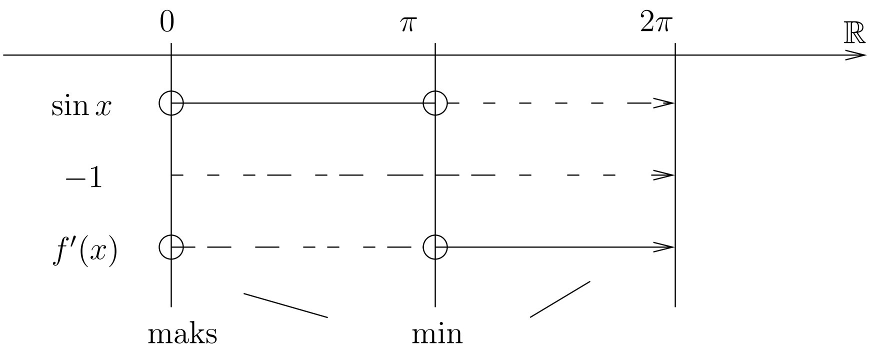
Når $f'(a) = 0$ i et punkt $x = a$ vil det si at funksjonen ikke forandres akkurat i dette punktet, som vil si at tangenten har stigningstall lik 0, og at f dermed har et mulig topp- eller bunnpunkt her. Vi minner kort om drøfting av den deriverte ved å drøfte et trigonometrisk uttrykk:

Eksempel 2.6 Funksjonen f gitt ved

$$f(x) = -1 + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi)$$

er (en del av) en harmonisk svingning med middelverdi -1 og amplityde 1, dvs. den har maksverdi 0 og minverdi -2. I hvilke punkter har f maks og min?

Vi har at $f'(x) = -\sin x$, og drøfter denne funksjonen:



Siden f' (og dermed forandringen) er negativ på intervallet $(0, \pi)$ og siden $x = 0$ er et *endepunkt* på intervallet, gir $x = 0$ et maksimumspunkt. Siden f' skifter fra å være negativ til å være positiv i $x = \pi$, er dette et minimumspunkt.

Vi har altså maks (lik 0) for $x = 0$ og min (lik -2) for $x = \pi$. ■

Vi vet at når $f'(x)$ er positiv har f positiv forandring, dvs. f vokser, og når $f'(x)$ er negativ, avtar f. Vi snakker gjerne om at f har positiv henholdsvis negativ vekst.

Spesielt når $f(t)$ er et antall individer i en populasjon (som gjerne kan være kronestykker) ved tiden t kaller vi $f'(t)$ *vekstraten* til populasjonen. Denne størrelsen sier hvor fort populasjonen vokser eller avtar.

Størrelsen

$$\frac{f'(t)}{f(t)}$$

kalles den *relative vekstraten* (også kalt den *spesifikke* vekstraten) til populasjonen. Denne størrelsen sier noe om hvor mye hvert individ bidrar til (den positive eller negative) veksten.

Vi merker oss spesielt at populasjoner der antallet er gitt ved en eksponentialfunksjon

$$f(t) = Ce^{rt}$$

har vi

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = r,$$

dvs. slike populasjoner har konstant relativ vekstrate (siden $f'(t) \propto f(t)$ for alle t). Husk at for slike populasjoner har vi også begrepene *doblingstid* for positiv vekst og *halveringstid* for negativ vekst (altså den tiden det tar for populasjonen å doble, henholdsvis halvere, seg).

Eksempel 2.7 En populasjon har konstant relativ vekstrate $r = 20$ pr år. Ved tidspunktet t_0 er det 800 individer i populasjonen. Vekstraten til populasjonen ved tidspunktet t_0 er da 16000. ■

Det er også klart at forandringer kan forandre seg. Det mest nærliggende eksemplet på dette er hvis $f(t)$ er funksjonen som måler en tilbakelagt *strekning* ved tiden t. Da er $f'(t)$, forandringen av strekningen, det vi kaller *hastighet*. Hvis hastigheten er konstant har den altså null forandring, men hvis vi derimot ikke har konstant hastighet, forandres hastigheten, og vi har en forandring av forandringen. Forandring av hastighet er det vi kaller *akselerasjon*.

Matematisk tar vi hånd om forandringer av forandringer osv. ved å derivere den deriverte, og eventuelt fortsette å derivere. Dette gir mye matematikk som vi kan bruke til å løse mange problemer. Hvis vi kjenner sammenhenger mellom alle ulike forandringer for et fenomen, kan vi kanskje si noe om fenomenet. Vi har nå endelig kommet til punket der vi kan introdusere difflikninger:

2.2 Differensiallikninger

Definisjon 2.8 *En differensiallikning (forkortet difflikning) er en likning der en funksjon og dens deriverte funksjoner inngår.*

Bemerkning 2.9 Vanligvis er vi interesserte i å løse difflikningen på et gitt intervall. Dersom intervallet ikke er oppgitt er det underforstått at vi skal velge det 'største' intervallet der likningen gir mening. ■

La oss bli enige om litt notasjon: Vi skal studere likninger der den ukjente er en funksjon. I dette kapitlet vil vi bruke y for denne ukjente funksjonen med variabel x. Etterhvert vil t (for tid) ofte brukes for variabelen.

For funksjonens deriverte vil vi veksle mellom notasjonen $\frac{dy}{dx}$ og $y'(x)$ (forkortet y') for den førstederiverte, men kun bruke notasjonen $y''(x)$ (forkortet y'') for den andrederiverte der $y''(x) = (y'(x))'$ (andre notasjoner er for eksempel $\frac{d^2y}{dx^2}$). Den tredjederiverte $(y'')'$ skrives $y^{(3)}$ osv.

Eksempel 2.10 Likningene $y^{(3)} = y$ og $y' + e^x y = 5$ er eksempler på difflikninger som gjelder på hele $\mathbb{R}$.

Likningen $y' = \frac{3y}{2x}$ er også en difflikning, men uttrykket $\frac{1}{2x}$ er ikke definert for $x = 0$, så for denne likningen kan man for eksempel bestemme seg for at likningen skal gjelde på intervallet $(0, \infty)$. ■

Ordenen til en difflikning er ordenen til den høyeste deriverte av den ukjente funksjonen som forekommer i likningen. Så i Eksempel 2.10 er likningene $y' = \frac{3y}{2x}$ og $y' + e^x y = 5$ første ordens difflikninger, mens $y^{(3)} = y$ er en tredje ordens difflikning.

Definisjon 2.11 *En løsning y av en n-te ordens difflikning på et intervall er en funksjon definert på intervallet som sammen med sine deriverte (som dermed må eksistere, dvs. y må være deriverbar n ganger i intervallet) tilfredsstiller sammenhengen gitt av likningen på det angitte intervallet.*

Bemerkning 2.12 I selve likningen og regningene bruker vi altså bare y, men når vi presenterer løsningene, vil vi ha regnet oss frem til en formel for y, og skriver da

$$y(x) = \dots$$

■

Eksempel 2.13 Funksjonen y gitt ved $y(x) = 102e^x$ er en løsning av difflikningen $y^{(3)} = y$ siden $y^{(3)} = 102e^x = y$, og y er tre ganger deriverbar. Et annet eksempel på løsning av likningen $y^{(3)} = y$ er $y(x) = 5e^x - 3$ (sjekk!). ■

Eksempel 2.14 Funksjonen y gitt ved $y(x) = x^{\frac{3}{2}}$ er en løsning av difflikningen $y' = \frac{3y}{2x}$ for $x \in (0, \infty)$ siden

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2x} = \frac{3y}{2x}.$$

Videre er for eksempel $y(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$ også en løsning av den samme likningen (sjekk!). ■

Å løse en difflikning vil si å finne alle funksjoner som passer inn i likningen. Generelle difflikninger er meget vanskelige å løse, og her er det stor forskningsaktivitet. I MAT1001 skal vi ta for oss tre typer difflikninger:

- første ordens lineære difflikninger
- separable difflikninger (er første ordens)
- andre ordens lineære homogene difflikninger med konstante koeffisienter

Legg merke til at de fleste av ordene her (unntatt *separabel*) kjenner vi igjen fra de ulike typene *differens*likninger vi studerer i Kompendium 2. Forskjellen er altså at **for differenslikninger er løsningene tallfølger (diskrete funksjoner), mens for difflikninger er løsningene (kontinuerlige) funksjoner.**

2.3 Antiderivasjon

Et av de enkleste eksemplene på en difflikning er likningen

$$y' = f(x),$$

der løsningene er funksjoner y slik at y' er en gitt funksjon f. For eksempel

$$y' = 3x.$$

For å løse slike likninger, må vi dermed 'derivere baklengs', en operasjon som kalles *antiderivering*. Dette er en helt sentral operasjon for å løse difflikninger, og vi skal derfor se litt nærmere på endel antideriveringsteknikker.

Definisjon 2.15 *En antiderivert til en funksjon f (på et intervall I) er en* *funksjon F (som er deriverbar på I) slik at*

$$F'(x) = f(x) \quad (\textit{for alle } x \in I).$$

Vi vet at $C' = 0$ for en konstant C. Videre er det kun konstante funksjoner som har null forandring, dvs. at løsningene til difflikningen

$$y' = 0 \tag{2.3}$$

er

$$y(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi nå har to antideriverte funksjoner F og G til en funksjon f, er

$$F'(x) = G'(x)$$

(siden begge er lik $f(x)$), dvs.

$$F'(x) - G'(x) = 0,$$

men siden $F'(x) - G'(x) = (F(x) - G(x))'$, har vi difflikningen

$$(F(x) - G(x))' = 0$$

(der $F - G$ er den ukjente funksjonen), som er på formen (2.3) og dermed har løsninger

$$F(x) - G(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Differansen mellom to antideriverte funksjoner til f er altså konstant. Dette betyr at

$$F(x) = G(x) + C,$$

og dermed får vi uendelig mange antideriverte funksjoner til f ved å finne én antiderivert F og legge til en vilkårlig konstant.

Eksempel 2.16 Siden

$$(\frac{3}{2}x^2)' = 3x,$$

er $F(x) = \frac{3}{2}x^2$ en antiderivert til $f(x) = 3x$. Funksjonen G gitt ved

$$G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5$$

er også en antiderivert til $f(x) = 3x$ siden vi også har at

$$(\frac{3}{2}x^2 + 5)' = 3x.$$

Tallet 5 kan erstattes av et hvilket som helst (reelt) tall, og vi får at alle de antideriverte til $f(x)$ kan skrives som

$$\frac{3}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\blacksquare$

Definisjon 2.17 *Den generelle antideriverte til en funksjon f er funksjonene gitt ved*

$$F(x) + C$$

der $C \in \mathbb{R}$ og F er en antiderivert til f. Hvis slike antideriverte fins, skriver vi

$$\int f(x)\,dx$$

for den generelle antideriverte til f som leses 'det ubestemte integralet av f med hensyn på x'. Vi har altså at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Bemerkning 2.18

- Antiderivering er (viser seg å være) det samme som *integrering*, og dermed vil også ordet integrering dukke opp endel, men for det meste vil vi bruke ordet antiderivering.
- Konstanten C kalles gjerne en *integrasjonskonstant*.

- Symbolet dx kalles *differensialet* til x. Dette symbolet angir at vi skal antiderivere/integrere med hensyn på variabelen x.

■

Eksempel 2.19 Det ubestemte integralet $\int dx$ er

$$\int dx = \int 1\, dx = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

siden $(x + C)' = 1$.

Hvis vi integrerer med hensyn på en annen variabel t får vi altså

$$\int dt = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Vi har altså:

$$\boxed{\int f'(x)\ dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Bemerkning 2.20

- Det kan vises at alle kontinuerlige funksjoner har en antiderivert. Men i en del tilfeller kan ikke en antiderivert angis som en 'elementær' funksjon, dvs. en lineær kombinasjon av de vanlige funksjonene. Et eksempel er funksjoen $f(x) = e^{x^2}$. Den antideriverte av f, som vi ikke kan angi på en elementær måte, er viktig i mange anvendelser.

- Alle regler og teknikker vi skal bruke krever at funksjonene vi betrakter er kontinuerlige, og hvis den deriverte av en funksjon f er involvert, kreves det også at f er deriverbar. Vi merker oss at de funksjonene vi skal regne med vil tilfredsstille disse kravene.

■

Kort oppsummering av notasjon:

$$\boxed{F'(x) = f(x) \qquad \text{betyr det samme som} \int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Siden vi bedriver 'baklengs derivering', finner vi automatisk den generelle antideriverte til mange funksjoner ved å bruke listen over kjente deriverte funksjoner baklengs:

- $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \quad a > 0$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

der C er en integrajonskonstant, $C \in \mathbb{R}$.

Vi får også endel regneregler for antiderivering ved å bruke regneregler for derivasjon baklengs:

- Antiderivere en funksjon multiplisert med en konstant $a \in \mathbb{R}$:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

- Antiderivere en sum:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- Antiderivere en differanse:

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Ved å bruke kjerneregelen baklengs får vi for det første to nyttige regler:

La F være en antiderivert til f, dvs. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Da er

- $$\int f(ax)\,dx = \frac{F(ax)}{a} + C, \quad a \neq 0 \tag{2.4}$$
- $$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C \tag{2.5}$$

der C er en integrasjonskonstant.

Disse kan sjekkes ved å derivere ved hjelp av kjerneregelen (gjør det!).

Eksempel 2.21 Vi har

$$\int \sin(3x)\,dx = -\frac{\cos(3x)}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ved (2.4) og ser at dette stemmer ved å derivere:

$$(-\frac{\cos 3x}{3} + C)' = -\frac{1}{3}(-\sin 3x) \cdot 3 = \sin 3x.$$

Videre har vi

$$\int e^{x^2} 2x\,dx = e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ved (2.5) siden $(x^2)' = 2x$. ■

Reglene (2.4) og (2.5) er spesialtilfeller av antideriveringsteknikken kalt **substitusjon**. Denne teknikken bruker kjerneregelen baklengs, og går ut på å 'gjenkjenne en kjerne'. Noen ganger må vi multiplisere med en konstant for å gjenkjenne en kjerne. Vi viser teknikken på noen eksempler:

Eksempel 2.22 Vi vil antiderivere $x\cos(x^2)$. Da ser vi at kjernen i cos-funksjonen er x^2, som har derivert $2x$. I uttrykket vi skal antiderivere har vi imidlertid ikke $2x$, men kun x. Dette ordner vi ved å ta med en faktor $\frac{1}{2}$ i regningene. Vi påstår at

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

der C er en integrasjonskonstant. Ved å derivere kan vi sjekke at dette er riktig. For å komme frem til dette svaret fører vi gjerne regningene slik:

$$\begin{aligned} & \textstyle\int x\cos(x^2)\,dx \\ = \;& \textstyle\int \frac{1}{2}\cos(u)\,du \\ = \;& \textstyle\frac{1}{2}\sin(u) + C \\ = \;& \textstyle\frac{1}{2}\sin(x^2) + C. \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \text{Substitusjon :} \\ x^2 = u \\ 2x\,dx = du \\ x\,dx = \frac{1}{2}du \end{array}}$$

Forklaring: Vi lager en substitusjonsboks, der vi har gjenkjent en kjerne, og ofte er det denne kjernen **vi substituerer for å få et enklere uttrykk å antiderivere**. I denne oppgaven bytter vi dermed ut kjernen x^2 med u. Det gir likningen $x^2 = u$.

Siden vår nye variabel nå er u, må vi bytte ut alle uttrykk i x med uttrykk i u. For å regne ut hva uttrykket vi skal antiderivere blir uttrykt i u tar vi utgangspunkt i likningen $x^2 = u$ og deriverer på begge sider med hensyn på x. Det gir

$$2x = \frac{du}{dx}$$

der vi bruker notasjonen $\frac{du}{dx}$ for $u'(x)$. Ved å gange med dx på begge sider (som ikke er helt stuerent, men som fungerer som en teknikk), får vi

$$2x\,dx = du.$$

Siden vi har $x\,dx$ i vårt uttrykk, kan vi dermed bytte det ut med $\frac{1}{2}du$ ved å dele på 2 i likningen ovenfor, og vi får regningen som står ved siden av substitusjonsboksen (der vi må huske å substituere tilbake til slutt). ■

Eksempel 2.23 Vi antideriverer $\tan x$ med hensyn på x:

$$\begin{aligned} & \int \tan x \, dx \\ = & \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ = & \int -\frac{1}{u} \, du \\ = & -\ln |u| + C \\ = & -\ln |\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} & \text{Substitusjon :} \\ & \cos x = u \\ & -\sin x \, dx = du \\ & \sin x \, dx = -du \end{aligned}}$$

■

Eksempel 2.24 For å antiderivere uttrykket $5x^2 e^{x^3}$ får vi følgende utregning:

$$\begin{aligned} & \int 5x^2 e^{x^3} \, dx \\ = & \int \frac{5}{3} e^u \, du \\ = & \frac{5}{3} e^u + C \\ = & \frac{5}{3} e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} & \text{Substitusjon :} \\ & x^3 = u \\ & 3x^2 \, dx = du \\ & x^2 \, dx = \frac{1}{3} \, du \\ & 5x^2 \, dx = \frac{5}{3} \, du \end{aligned}}$$

■

Vi vil også ha bruk for å antiderivere noen rasjonale funksjoner. For å klare dette merker vi oss først at for $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, er

$$\boxed{\int \frac{a}{bx - c} \, dx = \frac{a}{b} \ln |bx - c| + C.} \tag{2.6}$$

(sjekk ved å deriverer høyresiden!). For å komme frem til (2.6), substituerer vi $\boxed{bx - c = u}$, som gir $dx = \frac{1}{b} \, du$ (fullfør regningen!).

Ved hjelp av (2.6) og en spesiell oppspaltingsteknikk, kalt **delbrøksoppspalting**, kan vi antiderivere endel spesielle rasjonale uttrykk som ofte dukker opp i forbindelse med difflikninger:

Eksempel 2.25 Vi vil antiderivere uttrykket

$$\frac{1}{x(x-1)}.$$

Da får vi følgende regning:

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx \\ = \ & \int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\,dx \\ = \ & -\ln|x| + \ln|x-1| + C \\ = \ & \ln|\tfrac{x-1}{x}| + C. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Oppspalting :} \\ \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \\ 1 = A(x-1) + Bx = -A + (A+B)x \\ \begin{cases} -A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases} \\ \frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{array}}$$

Forklaring: Siden nevneren i uttrykket vi skal antiderivere er et produkt, spalter vi opp uttrykket ved å skrive det som en sum av to uttrykk der nevnerne er lineære uttrykk (faktorene i produktet). Det gir utregningen i oppspaltingsboksen. Vi setter dette inn i regningen på venstre side av boksen, og bruker (2.6). Regneregelen $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ gir den siste likheten. ■

Eksempel 2.26 Vi vil antiderivere det rasjonale uttrykket $\frac{5}{3x(3-2x)}$:

$$\begin{aligned} & \int \frac{5}{3x(3-2x)}\,dx \\ = \ & \frac{5}{3}\int \frac{1}{x(3-2x)}\,dx \\ = \ & \frac{5}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{3-2x}\,dx \\ = \ & \frac{5}{9}\int \frac{1}{x} + \frac{2}{3-2x}\,dx \\ = \ & \frac{5}{9}(\ln|x| + \int \frac{2}{3-2x}\,dx) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Oppspalting :} \\ \frac{1}{x(3-2x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-2x} \\ 1 = 3A - 2Ax + Bx \\ \begin{cases} 3A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases} \\ \frac{1}{x(3-2x)} = \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{3-2x} \end{array}}$$

Mellomregning: For å antiderivere $\frac{2}{3-2x}$ bruker vi substitusjon (eller bruk (2.6), og husk negativt fortegn pga. kjernen):

$$\begin{aligned} & \int \frac{2}{3-2x}\,dx \\ = \ & \int -\frac{1}{u}\,du \\ = \ & -\ln|u| + C \\ = \ & -\ln|3-2x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Substitusjon :} \\ 3 - 2x = u \\ -2\,dx = du \\ 2\,dx = -du \end{array}}$$

Vi får dermed

$$\int \frac{5}{3x(3-2x)}\,dx = \frac{5}{9}(\ln|x| - \ln|3-2x|) + C = \frac{5}{9}\ln\left|\frac{x}{3-2x}\right| + C$$

der alle integrasjonskonstantene er slått sammen til C. ■

Vi tar med en antideriveringsteknikk til, kalt **delvis integrasjon**. Her bruker vi produktregelen for derivasjon baklengs. Hvis vi skriver produktregelen for funksjonene u og v, har vi

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

På kortform (setter $u = u(x)$ og $v = v(x)$):

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

Hvis vi antideriverer med hensyn på x på begge sider får vi

$$uv = \int uv'\,dx + \int u'v\,dx. \tag{2.7}$$

Dette gir **formelen for delvis integrasjon** (der vi flytter over det ene leddet i (2.7)):

$$\boxed{\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.} \tag{2.8}$$

Dette kan vi bruke til å antiderivere uttrykk ved å se om faktorer i uttrykket kan kalles u og v' (venstresiden i (2.8)) og gi et uttrykk $u'v$ (som forekommer på høyresiden i formelen (2.8)) som er enklere å antiderivere.

Eksempel 2.27 Vi vil antiderivere uttrykket xe^x. Det gir følgende regning:

$$\begin{aligned} & \int xe^x\,dx \\ = \;& xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx \\ = \;& xe^x - e^x + C. \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \text{Delvis :} & \\ u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}}$$

Forklaring: Vi må først bestemme oss for hvilken faktor som skal være u og hvilken som skal være v'. Det er ikke alltid opplagt, men poenget er å velge dem slik at $u'v$ blir enklere å derivere (vanligvis). Her velger vi $u = x$ og $v' = e^x$, som gir $u'v = e^x$. Valget av u og v' holder vi styr på i delvisboksen. Vi setter deretter dette inn i formelen (2.8) og antideriverer ferdig. ∎

Noen ganger må man 'delvis integrere' flere ganger. Dessuten: husk å velge u og v' med omhu!

Eksempel 2.28 Vi vil antiderivere $x^2(\ln x)^2$:

$$\begin{aligned} & \int x^2(\ln x)^2\,dx \\ = \; & \tfrac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \tfrac{2}{3}\int x^2 \ln x\,dx \end{aligned}$$

Delvis :	
$u = (\ln x)^2$	$u' = \frac{2\ln x}{x}$
$v' = x^2$	$v = \frac{1}{3}x^3$

Mellomregning:

$$\begin{aligned} & \int x^2 \ln x\,dx \\ = \; & \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \int \tfrac{1}{3}x^2\,dx \\ = \; & \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Delvis :	
$u = \ln x$	$u' = \frac{1}{x}$
$v' = x^2$	$v = \frac{1}{3}x^3$

Vi får dermed:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$$

der integrasjonskonstantene er slått sammen til en 'ny' C. ∎

Oppsummering av teknikker: Når man skal antiderivere et uttrykk er det verdt å merke seg at

- det fins ikke én oppskrift man kan følge (slik det gjør for derivering), men et par tips kan vi gi:
  - antiderivere et rasjonal uttrykk: tenk først delbrøksoppspalting
  - antiderivere et produkt: tenk først delvis integrasjon
  - hvis du kan gjenkjenne en 'kjerne': tenk først substitusjon
- antiderivering er en kunst, og det kan meget godt hende at teknikkene man kan må kombineres!

Vi har nå uansett innført de teknikkene vi trenger for å kunne løse endel typer difflikninger.

2.4 Nå skal du kunne

- gi en presis definisjon og forklaring på begrepet den deriverte til en funksjon
- derivere alle typer funksjoner vi møtte i Kapittel 1, og finne viktig oppførsel som maks og min og hvor disse funksjonene vokser og avtar
- begrepene tilknyttet positiv og negativ vekst (vekstrate, relativ vekstrate, doblings- og halveringstid)
- definisjonen av en n-te ordens difflikning og løsning av en slik likning, herunder gi eksempler på difflikninger med tilhørende løsninger
- definisjonene av en antiderivert, den generelle antideriverte og det ubestemte integralet til en funksjon
- vite hvordan og hvorfor antideriveringsteknikkene substitusjon, delbrøksoppspalting og delvis integrasjon fungerer og dermed bruke dem til å antiderivere endel uttrykk
- tre inn i difflikningenes verden med stor selvtillit

Kapittel 3

Differensiallikninger

3.1 Første ordens lineære difflikninger

Definisjon 3.1 *En første ordens lineær difflikning er en likning på formen*

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{3.1}$$

der f og g er kjente funksjoner.

Husk at y (med variabel x) er den ukjente funksjonen.

Eksempel 3.2 Difflikningen

$$y' + 5e^x y = 7x, \quad x \in \mathbb{R}$$

er første ordens lineær. ■

Ordene *første ordens* betyr altså at ordenen til den høyeste deriverte av den ukjente funksjonen som forekommer i likningen er 1. Vi legger også merke til at $f(x)$ kan være 0, dvs. at y ikke trenger å forekomme i likningen. Da heter likningen $y' = g(x)$, og de antideriverte funksjonene til $g(x)$ gir løsningene.

Ordet *lineær* i denne sammenhengen refererer til y, og ikke x, og henspeiler på at uttrykket $y' + f(x)y$ er lineært i y og y'. Uttrykkene i x kan i utgangspunktet være hva som helst (men antas å være kontinuerlige).

3.1.1 Løsningsmetode

Den enkleste likningen på formen (3.1) får vi ved å sette $g(x) = 0$ og $f(x)$ lik en konstant $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Det gir difflikningen

$$y' + ry = 0, \tag{3.2}$$

dvs.

$$y' = -ry,$$

som betyr at løsningene y er de funksjonene slik at y' og y er proporsjonale. Fra Eksempel 2.2 vet vi dermed at eksponentialfunksjonene gitt ved $y(x) = e^{-rx}$ vil oppfylle likningen (3.2). Vi påstår videre at

Teorem 3.3 *Alle løsninger av difflikningen*

$$y' + ry = 0, \quad r \in \mathbb{R}$$

er funksjonene y gitt ved

$$y(x) = Ce^{-rx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vi kan vise at dette stemmer ved å løse likningen (3.2). Da vil vi samtidig finne en metode for å løse generelle første ordens lineære difflikninger.

Hvordan kan vi løse difflikningen (3.2)? Vi skal jo finne y, dvs. vi må kvitte oss med y' (akkurat som vi kvitter oss med $\sqrt{}$-tegnet for å finne x i likningen $\sqrt{x} = 5$).

Å kvitte seg med den deriverte vil si at vi må antiderivere. Spørsmålet er bare hvilket uttrykk vi skal antiderivere for å stå igjen med y.

Strategien er 'å gjøre noe' med likningen slik at vi kan bruke våre antideriveringsteknikker. Hvis vi tenker oss litt om, kan vi kanskje bli enige om at 'å gjøre noe' bør være å multiplisere likningen med 'noe'. Teknikkene vi har lært kan jo blant annet ta seg av produkter.

Vi kaller funksjonen 'noe' for $n(x)$ og multiplisere med denne. Det gir

$$n(x)y' + n(x)ry = 0. \tag{3.3}$$

Drømmesituasjonen vil nå være at n er slik at

$$n(x)r = n'(x), \tag{3.4}$$

for da får vi at (3.3) er difflikningen

$$n(x)y' + n'(x)y = 0$$

og vi kan bruke produktregelen på venstresiden og få gjort om likningen vi vil løse til

$$(n(x)y)' = 0,$$

og da kan vi antiderivere begge sider og løse ut for y.

Men vi vet jo at en funksjon n slik at (3.4) er oppfylt fins, nemlig

$$n(x) = e^{rx}$$

(fra Eksempel 2.2), så dermed kan vi løse (3.2) ved å multiplisere med e^{rx}. Det gir

$$\begin{aligned} e^{rx}y' + re^{rx}y &= 0 \\ (e^{rx}y)' &= 0. \end{aligned}$$

Vi antideriverer på begge sider og får

$$e^{rx}y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

og alle løsningene er dermed gitt ved

$$y(x) = Ce^{-rx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

som var det vi påsto i Teorem 3.3.

Legg merke til at integrasjonskonstanten gjør at vi får uendelig mange løsninger.

Eksempel 3.4 Alle løsningene til difflikningen

$$y' + 5y = 0$$

er gitt ved

$$y(x) = Ce^{-5x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Bemerkning 3.5 Sammenlign Teorem 3.3 med første ordens lineære *differens*likninger $x_{n+1} = rx_n$ med generell løsning $x_n = Cr^n$ (Kompendium 2). Teorem 3.3 er den 'kontinuerlige versjonen' av løsningene til disse differenslikningene. ■

For generelle første ordens lineære difflikninger

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{3.5}$$

bruker vi nå samme strategi som for likningene $y' + ry = 0$. For å kunne gjenkjenne venstresiden i (3.5) som den deriverte til et produkt, multipliserer vi likningen med faktoren

$$e^{F(x)}$$

der F er én antiderivert til f. (For $f(x) = r$ er $F(x) = rx$, og vi mulipliserte jo med e^{rx} i tilfellet $y' + ry = 0$.) Deretter regner vi og løser ut for y. Faktoren $e^{F(x)}$ kalles en *integrerende faktor* for likningen, siden det er den som gjør at vi kan løse likningen ved å integrere.

Eksempel 3.6 Vi vil løse difflikningen

$$y' + 2xy = 2x$$

som er første ordens lineær med $f(x) = 2x$. Én antiderivert er dermed gitt ved $F(x) = x^2$, og vi får integrerende faktor e^{x^2}, som vi multipliserer med:

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = 2xe^{x^2}$$

Vi gjenkjenner venstresiden som den deriverte av et produkt, så likningen er nå

$$(e^{x^2}y)' = 2xe^{x^2}.$$

Vi antideriverer begge sider med hensyn på x:

$$e^{x^2}y = e^{x^2} + C.$$

(sjekk!). Det gir at alle løsninger er gitt ved

$$y(x) = 1 + Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi setter $C = 0$, får vi at $y(x) = 1$ er en av løsningene (sjekk med likningen!). ■

Vi ser at de difflikningene $y' + f(x)y = g(x)$ vi kan løse fort begrenses av antideriveringsteknikkene vi kan, og dermed av hvilke funksjoner f og g er.

Vi oppsummerer metoden før vi tar flere eksempler:

Løsningsmetode for difflikningen $y' + f(x)y = g(x)$ på et intervall I når f og g er kontinuerlige på I:

1) Finn en antiderivert F til f.

2) Multiplisér likningen med faktoren $e^{F(x)}$. Likningen ser nå slik ut:

$$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x)$$

3) Gjenkjenner venstresiden som $(e^{F(x)}y)'$ (ved bruk av produktregel og kjerneregel), dvs. vi har

$$(e^{F(x)}y)' = e^{F(x)}g(x).$$

4) Antideriverer (siden $e^{F(x)}g(x)$ altså er en antiderivert til $e^{F(x)}y$) og får

$$e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)\,dx + C$$

(tar med integrasjonskonstanten her slik at vi husker den i utregningene).

5) Dermed har vi funnet uendelig mange løsninger på I:

$$y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)}g(x)\,dx + e^{-F(x)}C.$$

Metoden vil altså virke så lenge vi er i stand til først å finne $F(x) = \int f(x)\,dx$, og deretter $\int e^{F(x)}g(x)\,dx$, for så å bruke **5)** til slutt. I praksis er det enklest å huske at vi skal multiplisere med integrerende faktor og gjenkjenne venstresiden som den deriverte av et produkt.

Legg merke til at vi kan ha uendelig mange integrerende faktorer i punkt **2)** siden vi har uendelig mange antideriverte funksjoner å velge mellom: Vi kan alltid legge til en konstant. Vi velger her alltid den der konstanten er 0.

Legg også merke til at siden likningen vi løser har leddet $f(x)y$ med $f(x)$ til venstre for y, er det mest naturlig å multiplisere med integrerende faktor fra venstre. Det kan være greit å være konsekvent her, men husk at vi har kommutativitet, slik at vi kan fort ordne opp i uttrykkene slik at de ser 'penest' mulig ut.

Vi har altså en løsningsformel (i **5)**) for første ordens lineære difflikninger. Vi skal komme tilbake til bruk av denne.

La oss ta noen eksempler:

Eksempel 3.7 Vi skal løse difflikningen

$$y' + 3y = 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

som er på formen $y' + f(x)y = g(x)$ med $f(x) = 3$ og $g(x) = 4$. Vi kan sette $F(x) = 3x$ og får integrerende faktor e^{3x}. Vi multipliserer likningen med faktoren og får

$$\begin{aligned}
e^{3x}y' + e^{3x}3y &= e^{3x}4 \\
(e^{3x}y)' &= 4e^{3x} \\
e^{3x}y &= \tfrac{4}{3}e^{3x} + C \\
y(x) &= \tfrac{4}{3} + Ce^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Setter vi $C = 0$, ser vi at den konstante funksjonen $y(x) = \frac{4}{3}$ er én løsning av likningen. Setter vi $C = \frac{1}{7}$ får vi funksjonen $y(x) = \frac{4}{3} + \frac{1}{7}e^{-3x}$ som en annen løsning. ■

I det neste eksemplet skal vi se at selv om vi må anta $x \neq 0$ underveis, vil løsningen vi kommer frem til gjelde for alle x:

Eksempel 3.8 Se på likningen

$$xy' - 2y = -2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Likningen er første ordens (y' er den høyeste ordens deriverte som forekommer), og for å bruke løsningsmetoden vi har lært, må vi ha likningen på formen $y' + f(x)y = g(x)$. Vi antar $x \neq 0$ og deler med x:

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2}{x}.$$

For å finne integrerende faktor, finner vi en antiderivert for $-\frac{2}{x}$, for eksempel $-2\ln|x| = \ln(x^{-2})$ (husk at $x \neq 0$ og at logaritmefunksjoner kun aksepterer positive tall). Integrerende faktor blir dermed $e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}$. Ved å multiplisere med denne får vi

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{x^2}y' - \tfrac{2}{x^3}y &= -\tfrac{2}{x^3} \\
(\tfrac{1}{x^2}y)' &= -\tfrac{2}{x^3} \\
\tfrac{1}{x^2}y &= \tfrac{1}{x^2} + C \\
y(x) &= 1 + Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Siden vi antok at $x \neq 0$ for å løse likningen, merker vi oss nå at y er deriverbar i $x = 0$, og at y er er en løsning av difflikningen også når $x = 0$, dvs. løsningene vi har kommet frem til gjelder for hele $\mathbb{R}$.

Grafene til løsningene blir altså parabler når $C \neq 0$ (linje for $C = 0$). Tegn noen av disse for ulike verdier av C. ■

Vi får ofte ln-uttrykk i utregningen av integrerende faktor, og siden logaritmer kun aksepterer positive tall, må vi ofte gjøre bruk av absoluttverdi i denne sammenhengen. La oss ta med et eksempel der vi får absoluttverdi i integrerende faktor, og dermed må skjøte sammen løsninger. Dette eksemplet vil vise at vi må kunne drøfte hvordan løsningene ser ut, og at slike oppgaver blir enklere hvis man for eksempel vet at man kan anta at $x > 0$ før man starter (noe man gjerne kan finne ut hvis likningen kommer fra et problem i virkeligheten):

Eksempel 3.9 Se på difflikningen

$$\boxed{xy' - y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.} \tag{3.6}$$

For å løse denne, antar vi $x \neq 0$:

$$y' - \frac{1}{x}y = x. \tag{3.7}$$

Integrerende faktor blir

$$e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

Hvis vi beholder absoluttverditegnet, får vi

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{|x|}y' - \tfrac{1}{|x|x}y &= \tfrac{x}{|x|} \\ (\tfrac{1}{|x|}y)' &= \tfrac{x}{|x|} \\ \tfrac{1}{|x|}y &= |x| + C \\ y(x) &= |x|^2 + C|x|, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

dvs.

$$\boxed{y(x) = x^2 + C|x|, \quad C \in \mathbb{R},} \tag{3.8}$$

eller vi kan løse opp absoluttverditegnet i integrerende faktor og få to tilfeller: For $x > 0$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x}y' - \tfrac{1}{x^2}y &= 1 \\ (\tfrac{1}{x}y)' &= 1 \\ \tfrac{1}{x}y &= x + C_1 \\ y(x) &= x^2 + C_1x, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

For $x < 0$:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{x}y' + \tfrac{1}{x^2}y &= -1 \\ (\tfrac{1}{x}y)' &= 1 \\ \tfrac{1}{x}y &= x + C_2 \\ y(x) &= x^2 + C_2x, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uansett, setter vi disse sammen, eventuelt løser opp absoluttverditegnet i (3.8), får vi følgende løsninger for likning (3.7):

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + C_1x, & x > 0 \\ x^2 + C_2x & x < 0. \end{cases}$$

Går vi så til den opprinnelige difflikningen, likning (3.6), ser vi at denne er definert for alle $x \in \mathbb{R}$, dermed skal vi kunne derivere $y(x)$ for alle x, og spesielt for $x = 0$. La oss se hva det betyr:

For $x \neq 0$, har vi altså løsningene

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + C_1 x, & x > 0 \\ x^2 + C_2 x & x < 0, \end{cases}$$

og deriverer vi, får vi

$$y'(x) = \begin{cases} 2x + C_1, & x > 0 \\ 2x + C_2 & x < 0. \end{cases}$$

Hvis vi skal kunne definere $y(0)$ slik at $y'(0)$ også eksisterer, er det slik at vi må ha at $\lim_{x \to 0^-} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} y'(x)$, som da vil være lik $y'(0)$. Siden den første grenseverdien er C_1, mens den andre er C_2, må $C_1 = C_2$!

Dermed er løsningene til likning (3.6) på $\mathbb{R}$

$$\boxed{y(x) = x^2 + Cx, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

(du kan nå sjekke at y passer i (3.6) også når $x = 0$.)

For eksempel, så er funksjonen

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x > 0 \\ x^2 - x & x < 0 \end{cases}$$

en løsning av (3.7) der $x \neq 0$, men lar vi den gjelde også for $x = 0$, dvs. setter

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 - x & x < 0, \end{cases}$$

er den ikke en løsning av (3.6) på hele $\mathbb{R}$ (siden denne funksjonen ikke er deriverbar for $x = 0$). ■

For å minne om at $f(x)$ og $g(x)$ i (3.1) kan være hva som helst, tar vi også med følgende eksempel:

Eksempel 3.10 Difflikningen

$$y' + (\cos x)\, y = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

er også første ordens lineær. Én integrerende faktor er nå $e^{\sin x}$. Dermed kan vi løse likningen:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x}y' + e^{\sin x}(\cos x)y &= e^{\sin x}\cos x \\
(e^{\sin x}y)' &= e^{\sin x}\cos x \\
e^{\sin x}y &= \int e^{\sin x}\cos x\,dx \\
e^{\sin x}y &= e^{\sin x} + C \quad \text{(substitusjon: } \boxed{\sin x = u}\text{)} \\
y(x) &= 1 + Ce^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tegn gjerne disse funksjonene på kalkulator for noen verdier av C. Og husk: Som vanlig for løsning av likninger, kan vi sette prøve på svaret. ■

3.2 Separable difflikninger

Definisjon 3.11 *En difflikning kalles separabel dersom den kan skrives på formen*

$$p(y)y' = q(x) \tag{3.9}$$

der p og q er kjente funksjoner.

Eksempel 3.12 Difflikningen

$$yy' + (1 + y^2)x = 0$$

er separabel, siden den kan skrives på formen (3.9): $\frac{y}{1+y^2}y' = -x$ der $p(y) = \frac{y}{1+y^2}$ og $q(x) = x$. ■

Ordet separabel står altså for at x-leddene og y-leddene kan separeres i likningen: Vi kan ordne alle leddene med y til venstre og alle leddene med x til høyre for likhetstegnet.

Siden y' er den høyeste ordens deriverte av y som forekommer i separable difflikninger, er disse likningene automatisk av første orden.

Endel separable difflikninger er dessuten også lineære, mens andre ikke er lineære. Videre fins det første ordens difflikninger som hverken er lineære eller separable. De skal vi ikke lære å løse. Vi kan altså dele inn første ordens difflikninger i fire kategorier, noe følgende tabell viser, med et eksempel for hver type:

første ordens	lineær	ikke lineær
separabel	$y' + xy = x$	$y' + xy^2 = x$
ikke separabel	$y' + xy = x^2$	$y' + xy^2 = x^2$

For eksempel er $y' + xy = x$ separabel:

$$\begin{aligned} y' + xy &= x \\ y' &= x - xy \\ y' &= x(1-y) \\ \tfrac{y'}{1-y} &= x \end{aligned}$$

(finn flere eksempler til tabellen!).

3.2.1 Løsningsmetode

Vi vil nå løse difflikninger på formen

$$p(y)y' = q(x),$$

og vi starter med et eksempel:

Eksempel 3.13 Difflikningen

$$y^2y' = e^x$$

er separabel, men ikke lineær (pga. y^2), så for å løse denne må vi gjøre noe annet enn det vi gjorde for lineære difflikninger i forrige seksjon.

Det er nå lurt å huske at y er en funksjon i x, og at likningen vår er forkortelsen for

$$y^2(x)y'(x) = e^x.$$

(Vi bruker skrivemåten $y^2(x)$ for $(y(x))^2$.) For å finne hva $y(x)$ er, må vi bli kvitt $y'(x)$, og dermed må vi antiderivere. Vi går rett på og antideriverer med hensyn på x på begge sider:

$$\int y^2(x)y'(x)\,dx = \int e^x\,dx. \tag{3.10}$$

Høyresiden i (3.10) kan vi regne ut. Hva med venstresiden? Jo, vi gjenkjenner en kjerne ($y'(x)$), og da tenker vi substitusjon:

$$\begin{aligned} & \int y^2(x)y'(x)\,dx \\ = & \int y^2\,dy \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \text{Substitusjon :} \\ y(x) = y \\ y'(x) = \frac{dy}{dx} \\ y'(x)\,dx = dy \end{array}}$$

Vi substituerer altså $y(x) = y$ (navnevalget er ikke tilfeldig), og får $y'(x)\,dx = dy$, som betyr at vi får et ubestemt integral med hensyn på y, så (3.10) gir oss

$$\int y^2\,dy = \int e^x\,dx,$$

dvs. vi kan regne ut venstresiden ved å antiderivere y^2 med hensyn på y. Det gir

$$\frac{1}{3}y^3 = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

der vi slår sammen integrasjonskonstantene til en C. Videre får vi

$$\begin{aligned} y^3 &= 3e^x + 3C \\ y^3 &= 3e^x + C, \end{aligned}$$

der C nå er en 'ny' konstant (integrasjonskonstantene er uansett et vilkårlig reelt tall, og vi kan multiplisere disse med hvilket som helst tall forskjellig fra 0, og fortsatt ha en vilkårlig konstant).

Dermed er løsningene

$$y(x) = \sqrt[3]{3e^x + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Vi følger oppskriften i eksemplet og får følgende generelle **løsningsmetode for en separabel difflikning** $p(y)y' = q(x)$**:**

1) Integrerer med hensyn på x på begge sider, dvs. vi får

$$\int p(y(x))y'(x)\,dx = \int q(x)\,dx.$$

2) Substituerer $y = y(x)$ i integralet på venstre side (mest praktisk å bruke samme bokstav). Det gir $y'(x)\,dx = dy$, dermed

$$\int p(y)\,dy = \int q(x)\,dx.$$

3) Vi kan (forhåpentligvis) integrere på begge sider, slå sammen integrasjonskonstantene og løse ut for y.

Som for de lineære difflikningene observerer vi at de separable difflikningene vi vil kunne løse begrenses av hvilke antideriveringsteknikker vi kan og dermed av hva slags funksjoner p og q er.

For difflikninger som både er lineære og separable har vi nå altså to løsningsmetoder å velge mellom.

Bemerkning 3.14 Løsningsmetoden for separable difflikninger vil ikke gi oss en løsningsformel slik vi fikk for lineære difflikninger. Det tilsier at separable difflikninger (de som ikke er lineære) er vanskeligere å studere enn lineære difflikninger.

Vi har heller ikke en analogi for separable difflikninger til noen av de *differens*likningene vi har sett i Kompendium 2 (en analogi som vi har for lineære difflikninger).

Separable difflikninger har mange anvendelser som vi skal se i neste kapittel. Løsningsmetoden vi nå har sett vil gi oss informasjonen vi trenger til våre anvendelser. ■

Eksempel 3.15 Likningen

$$y' = \frac{x^2}{y^2}, \quad y \neq 0$$

er separabel, og vi kan finne alle funksjonene som oppfyller likningen ved å følge løsningsmetoden ovenfor:

$$\begin{aligned}
y(x)^2 y'(x) &= x^2 && \text{(separerer)} \\
\int y^2\,dy &= \int x^2\,dx && \text{(substitusjon: } \boxed{y = y(x)},\ dy = y'(x)dx) \\
\tfrac{1}{3}y^3 + C_1 &= \tfrac{1}{3}x^3 + C_2 && (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) \\
y^3 &= x^3 + C && \text{(konstanter samles: } C := 3C_2 - 3C_1) \\
y(x) &= \sqrt[3]{x^3 + C},
\end{aligned}$$

der $C \in \mathbb{R}$. ■

Løsningene til de lineære likningene fra seksjonene foran eksisterer overalt hvor likningen er definert. Dette er ikke alltid tilfellet for de separable likningene, hvor løsningsområdet vil variere fra løsning til løsning. Her er et eksempel:

Eksempel 3.16 Likningen i Eksempel 3.12 er definert overalt. La oss finne løsningene ved å følge løsningsmetoden ovenfor:

$$\begin{aligned}
\tfrac{y(x)}{1+y(x)^2} y'(x) &= -x \\
\int \tfrac{y}{1+y^2}\,dy &= -\int x\,dx && (\boxed{y = y(x)},\ dy = y'(x)\,dx) \\
\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) + C_1 &= -\tfrac{1}{2}x^2 + C_2 && (\boxed{1 + y^2 = u}, 2y\,dy = du, \text{så } y\,dy = \tfrac{1}{2}\,du) \\
\ln(1+y^2) &= -x^2 + C && (C := 2C_2 - 2C_1) \\
1 + y^2 &= e^{-x^2}e^C \\
y^2 &= Ce^{-x^2} - 1 && \text{(ny } C) \\
y(x) &= \pm\sqrt{Ce^{-x^2} - 1}
\end{aligned}$$

der C er slik at $Ce^{-x^2} - 1 > 0$ (y blir ikke deriverbar når $Ce^{-x^2} - 1 = 0$).

Vi legger merke til at her vil løsningsområdet avhenge av integrasjonskonstanten C siden vi ikke kan ha et negativt uttrykk under rottegnet. ■

3.3 Andre ordens lineære homogene difflikninger med konstante koeffisienter

Analogien til Kompendium 2 og differenslikninger er nå slående (forskjellen er altså at vi nå studerer funksjoner istedenfor tallfølger):

Definisjon 3.17 *En andre ordens lineær homogen difflikning med konstante koeffisienter er en likning på formen*

$$y'' + by' + cy = 0$$

der b og c er (reelle) konstanter og $y = y(x)$ er en funksjon av en (reell) variabel.

Eksempel 3.18 Difflikningene $y'' + 5y' - y = 0$ og $2y'' - 7y' + 3y = 0$ er begge andre ordens lineære homogene med konstante koeffisienter (i den andre likningen kan vi dele med 2 og få $y'' - \frac{7}{2}y' + \frac{3}{2}y = 0$). ■

3.3.1 Løsningsmetode

Løsningsmetode for difflikningen $y'' + by' + cy = 0$:

1) Difflikningen gir opphav til en ny likning

$$r^2 + br + c = 0 \tag{3.11}$$

som kalles *den karakteristiske likningen* til difflikningen.

2) Løsningene til difflikningen vil avhenge av løsningene til andregradslikningen (3.11), hvorav vi har følgende tre tilfeller:

a) To reelle røtter r_1 og r_2 (for eksempel $r^2 + 2r - 3 = 0$, der røttene er 1 og -3). Da har vi løsningsformel

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}, \quad C, D \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

b) Én reell rot r_1 (for eksempel $r^2 + 2r + 1 = 0$ der $r_1 = -1$). Løsningsformelen viser seg nå å bli

$$y(x) = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}, \quad C, D \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

c) To komplekse røtter r_1 og $\overline{r_1}$, $r_1 \neq \overline{r_1}$. La oss kalle røttene vi får i dette tilfellet for $a + id$ og $a - id$ (for eksempel likningen $r^2 + 2r + 3 = 0$ gir røttene $-1 + i\sqrt{2}$ og $-1 - i\sqrt{2}$, dvs. $a = -1$ og $d = \sqrt{2}$). Løsningene av difflikningen viser seg nå å være gitt ved formelen

$$y(x) = e^{ax}(C\cos(dx) + D\sin(dx)), \quad C, D \in \mathbb{R}. \tag{3.14}$$

Bemerkning 3.19 Akkurat som for differenslikninger vil selve difflikningen vi vil løse ha reelle løsninger selv om løsningene til den karakteristiske likningen i noen tilfeller er komplekse! ■

La oss ta et par eksempler før vi forklarer løsningsmetoden litt nærmere.

Eksempel 3.20 Difflikningen

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

har karakteristisk likning $r^2 - 5r + 4 = 0$, som har røtter

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Vi bruker dermed formelen (3.12) og får løsninger

$$y(x) = Ce^{4x} + De^{x}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

■

Eksempel 3.21 Difflikningen

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

har karakteristisk likning $4r^2 - 4r + 1 = 0$, som har kun en (reell) rot

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vi bruker dermed formelen (3.13) og får løsninger

$$y(x) = Ce^{\frac{x}{2}} + Dxe^{\frac{x}{2}}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Legg merke til at vi også kunne ha delt likningen på 4 først, for å få konstanten 1 foran y''. Vi hadde uansett fått samme røtter, og dermed samme løsninger. Dette gjelder generelt i likninger med konstante koeffisienter. ■

Eksempel 3.22 Difflikningen

$$y'' - 4y' + 85y = 0$$

har karakteristisk likning $r^2 - 4r + 85 = 0$, som har røtter $r = 2 \pm 9i$ (sjekk!). Så difflikningen har løsninger gitt ved formel (3.14):

$$y(x) = e^{2x}(C\cos(9x) + D\sin(9x)), \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

■

La oss se litt nærmere på hvorfor løsningene blir som de blir for andre ordens lineære homogene difflikninger med konstante koeffisienter.

Litt mer om løsningsmetoden (ekstrastoff, kan hoppes over)

Vi har følgende hjelpesetning:

Lemma 3.23 *Anta at funksjonene $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er løsninger av likningen*

$$y'' + by' + cy = 0.$$

Da er

$$y(x) = Cy_1(x) + Dy_2(x)$$

også en løsning for alle konstanter $C, D \in \mathbb{R}$.

Bevis: Resultatet sjekkes ved å sette

$$\begin{aligned} y &= Cy_1 + Dy_2 \\ y' &= Cy_1' + Dy_2' \\ y'' &= Cy_1'' + Dy_2'' \end{aligned}$$

inn i likningen:

$$\begin{aligned} y'' + by' + cy &= (Cy_1'' + Dy_2'') + b(Cy_1' + Dy_2') + c(Cy_1 + Dy_2) \\ &= C(y_1'' + by_1' + cy_1) + D(y_2'' + by_2' + cy_2) \\ &= C \cdot 0 + D \cdot 0 \quad \text{(siden } y_1 \text{ og } y_2 \text{ passer inn)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

så y er en løsning av likningen. □

La oss så se hvor den karakteristiske likningen kommer fra. Vi vil altså løse spesielle andre ordens difflikninger. Vi tar et lite skritt tilbake og ser på likninger på formen

$$y' + by = 0. \tag{3.15}$$

Dette er første ordens lineære homogene difflikninger der $f(x) = b$ og $g(x) = 0$. Disse kan vi løse:

Ved å bruke integrerende faktor e^{bx} ser vi at løsningene av (3.15) er på formen

$$y(x) = Ce^{-bx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

dvs. vi har eksponentialfunksjoner som løsninger. Som de matematikerne vi er, prøver vi om eksponentialfunksjoner også passer inn i *andre ordens* homogene difflikninger med konstante koeffisienter (vi brukte en tilsvarende strategi for differenslikninger).

Vi prøver med $y = e^{rx}$ (der $r \in \mathbb{R}$) som løsning for likningen

$$y'' + by' + cy = 0.$$

Hvis vi setter inn $y' = re^{rx}$ og $y'' = r^2e^{rx}$ får vi:

$$y'' + by' + cy = r^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = e^{rx}(r^2 + br + c).$$

Vi ser at $y = e^{rx}$ er en løsning dersom $e^{rx}(r^2 + br + c)$ er lik 0 for alle x. Siden e^{rx} aldri er 0, er dette oppfylt akkurat når

$$r^2 + br + c = 0. \tag{3.16}$$

Vi kan altså finne løsninger for difflikningen $y'' + by' + cy = 0$ nettopp ved å løse likningen (3.16), og det er derfor $r^2 + br + c = 0$ kalles den *karakteristiske likningen* til difflikningen.

Ved hjelp av dette og lemmaet vårt (Lemma 3.23) ser vi at alle løsningene vi ga i løsningsmetoden i **2)a)** virkelig er løsninger av difflikningen. At disse faktisk gir alle løsningene skal vi nå begrunne litt nærmere.

La oss vise hva som skjer for punkt **2)a)** ved et eksempel:

Eksempel 3.24 Vi vil løse difflikningen

$$y'' - 3y' - 4y = 0.$$

(Generelt har vi altså $y'' + by' + cy = 0$.)

Vi antar at vi har en funksjon y som passer inn i likningen. Siden løsningene av den karakteristiske likningen $r^2 - 3r - 4 = 0$ er $r_1 = 4$ og $r_2 = -1$, vil vi vise at y er på formen

$$y(x) = Ce^{4x} + De^{-x}$$

for passende valg av C og D. (Generelt $y(x) = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$.)

Trikset er å redusere likningen til en enklere likning som vi allerede kan løse. Da trengs noen hjelpefunksjoner. Vi innfører først $\boxed{u = \frac{y}{e^{4x}}}$, dvs. $y = ue^{4x}$ (generelt bruker vi r_1 istedenfor 4). Vi deriverer (husk at u er en funksjon og vi må bruke produktregel):

$$\begin{aligned}
y &= ue^{4x} && (3.17)\\
y' &= 4ue^{4x} + u'e^{4x} && (3.18)\\
y'' &= 4u(4e^{4x}) + 4u'e^{4x} + u'(4e^{4x}) + u''e^{4x} && (3.19)\\
&= 16ue^{4x} + 8u'e^{4x} + u''e^{4x}. && (3.20)
\end{aligned}$$

Vi setter inn i likningen vår:

$$\begin{aligned}
y'' - 3y' - 4y &= 16ue^{4x} + 8u'e^{4x} + u''e^{4x} - 3(4ue^{4x} + u'e^{4x}) - 4ue^{4x}\\
&= u''e^{4x} + 5u'e^{4x}\\
&= e^{4x}(u'' + 5u').
\end{aligned}$$

(Generelt vil vi finne igjen $r_1^2 + br_1 + c$ foran u-leddene slik at de faller bort. Videre vil det bli $2r_1 + b$ foran u'.) Siden y er antatt å oppfylle likningen $y'' - 3y' - 4y = 0$, må vi ha

$$e^{4x}(u'' + 5u') = 0,$$

dvs. vi får $u'' + 5u' = 0$, så hjelpefunksjonen u oppfyller en **enklere** homogen andreordens difflikning med konstante koeffisienter. Likningen $u'' + 5u' = 0$ kan vi nå gjøre om til en førsteordens likning ved å innføre hjelpefunksjonen $\boxed{v = u'}$. Da får vi likningen $v' + 5v = 0$, som vi vet har løsninger

$$v(x) = C_1 e^{-5x}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Og så kan vi nøste oss tilbake: Siden $v = u'$, er $u' = C_1 e^{-5x}$, dvs.

$$u(x) = -\frac{C_1}{5} e^{-5x} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Videre, siden $y = ue^{4x}$, er

$$y(x) = (-\frac{C_1}{5} e^{-5x} + C_2) e^{4x},$$

dvs.

$$y(x) = -\frac{C_1}{5} e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

(Generelt får vi altså $2r_1 + b$ der vi har 5 og $e^{-(2r_1+b)} \cdot e^{r_1}$ blir $e^{-(r_1+b)}$. For en andregradslikning $r^2 + br + c = 0$ med løsninger r_1 og r_2 har vi alltid $r_1 + r_2 = -b$, så $e^{-(r_1+b)} = e^{r_2}$.)

Vi kaller $-\frac{C_1}{5}$ for D og C_2 for C (alle er konstanter i $\mathbb{R}$), og får

$$y(x) = Ce^{4x} + De^{-x}, \quad C, D \in \mathbb{R},$$

som var det vi ønsket. ■

Hva skjer så når den karakteristiske likningen har én reell rot (punkt **2)b)** i løsningsmetoden)?

Eksempel 3.25 La oss se på likningen $y'' - 8y' + 16y = 0$. Den karakteristiske likningen er $r^2 - 8r + 16 = 0$, som har én rot: $r_1 = 4$. Fra det vi har sett vet vi at $y(x) = e^{4x}$ er en løsning av difflikningen (kan også sjekkes direkte). Bruker vi nå formelen for to reelle røtter, får vi bare

$$y(x) = Ce^{4x} + De^{4x} = (C + D)e^{4x} = Ee^{4x}, \quad E \in \mathbb{R}, \tag{3.21}$$

og dette er ikke alle løsningene til $y'' - 8y' + 16y = 0$ ((3.21) er jo alle løsningene til likningen $y' - 4y = 0$, og det bør være flere funksjoner som oppfyller $y'' - 8y' + 16y = 0$).

For å komme videre og finne alle løsninger, bruker vi samme triks som for to reelle røtter: Vi innfører hjelpefunksjonen $u = \frac{y}{e^{4x}}$, dvs. $y = ue^{4x}$ (generelt bruker vi nå r_1, den eneste roten vi har, istedenfor 4).

Vi setter inn (3.17) osv. i likningen vår (siden vi i dette tilfellet har regnet ut det vi trenger før):

$$\begin{aligned} y'' - 8y' + 16y &= 16ue^{4x} + 8u'e^{4x} + u''e^{4x} - 8(4ue^{4x} + u'e^{4x}) + 16ue^{4x} \\ &= u''e^{4x}. \end{aligned}$$

(Generelt vil nå alle leddene med u *og* u' falle bort, nettopp fordi vi bare har én rot: For to røtter sto $2r_1 + b$ foran u', og dette leddet blir 0 siden $r_1 + r_1 = -b$ for likningen $r^2 + br + c = 0$ med én rot r_1.)

Siden $y = e^{4x}$ er en løsning, må nå $u''e^{4x}$ være 0 for alle x, dermed må vi ha

$$u'' = 0,$$

dvs. $u' = C_1$ og $u = C_1x + C_2$ der C_1 og C_2 er konstanter. Nøster vi oss tilbake igjen, får vi

$$y = ue^{4x} = (C_1x + C_2)e^{4x} = C_1xe^{4x} + C_2e^{4x}.$$

Vi kaller C_1 for D og C_2 for C, og får løsningene

$$y(x) = Ce^{4x} + Dxe^{4x}, \quad C, D \in \mathbb{R},$$

som viser punkt **2)b)** i løsningsmetoden når likningen er $y'' - 8y' + 16y = 0$. Metoden (kalt 'redusering av ordenen') kan generaliseres (med r for 4) for å vise den generelle formelen. ■

For å vise formelen for komplekse røtter (punkt **2)c)** i løsningsmetoden), er fremgangsmåten helt tilsvarende, der vi i tillegg bruker definisjonen av den komplekse eksponentialfunksjonen ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) for å få inn sinus og cosinus, og for å kvitte oss med de imaginære i-leddene (husk at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$) (helt tilsvarende som for differenslikninger).

Når vi har komplekse røtter i den karakteristiske likningen, noterer vi oss altså at vi får trigonometriske funksjoner som løsninger av difflikningen (for differenslikninger har vi i dette tilfellet trigonometriske tallfølger)!

3.4 Initialbetingelser

Vi har nå sett på noen spesielle første- og andre ordens difflikninger, og sett at vi får *to* konstanter (ofte kalt C og D) i løsningsformlene for andre ordens likninger, mens vi får én konstant (ofte C) for første ordens.

Konstantene er altså integrasjonskonstanter, som dukker opp når vi antideriverer: for første ordens antideriverer vi én gang for å kvitte oss med y', for andre ordens må vi antiderivere to ganger for å kvitte oss med y''.

Disse konstantene bestemmes ofte ved hjelp av tilleggsopplysninger, kalt *initialbetingelser*.

Vi kaller gjerne løsningsmengden der konstantene er med i formelen for den *generelle* løsningen til difflikningen, mens initialbetingelser vil gi oss *spesielle* løsninger (også kalt *partikulære* løsninger). Når vi skal løse en difflikning med initialbetingelser, kalles dette gjerne et *initialverdiproblem*.

Eksempel 3.26 Se på likningen

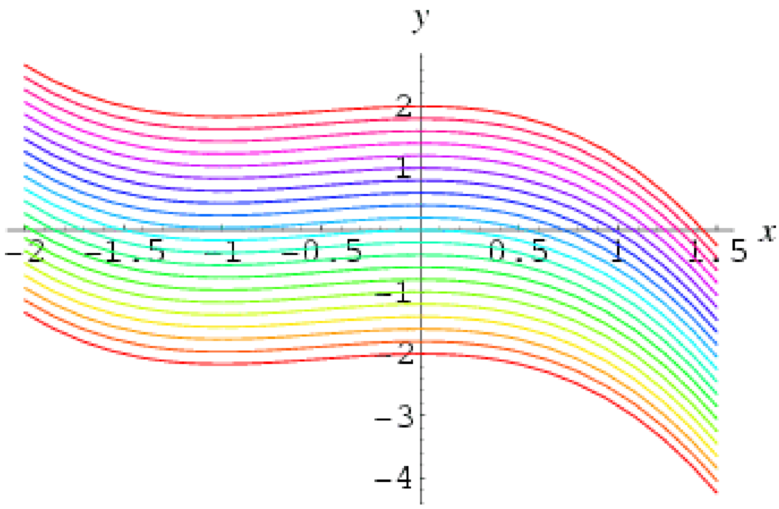
$$y' = -x^2 - x. \tag{3.22}$$

(som er separabel). Den sier at y er en antiderivert av $-x^2 - x$, så vi får løsningene

$$y(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

dvs. (3.23) er den generelle løsningen til (3.22).

Hvis vi tegner grafene til disse funksjonene for endel valg av C-er mellom -2 og 2, får vi (en såkalt *kurveskare*):



Hvis vi nå blir bedt om å løse initialverdiproblemet

$$y' = -x^2 - x, \quad y(0) = 0,$$

blir vi bedt om å finne den funksjonen blant løsningene (3.23) der $y(0) = 0$. Vi setter inn betingelsen i (3.23), som gir

$$0 = 0 + C,$$

dvs. $C = 0$. Så initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir den spesielle løsningen

$$y(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Grafen til denne funksjonen er den av kurvene på tegningen ovenfor som går gjennom origo. ■

Når det gjelder å finne én spesiell løsning fra initialbetingelser er det stor forskjell på lineære og ikke-lineære difflikninger:

Eksempel 3.27 Vi vil løse initialverdiproblemet

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0. \tag{3.24}$$

For å løse denne må vi anta at $y(x) \neq 0$ slik at vi kan separere:

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1.$$

Hva hvis $y(x) = 0$? Først legger vi merke til at vi har en løsning på problemet (3.24), nemlig $y(x) = 0$ for alle x. Men vi kan også finne flere ved å bruke løsningsmetoden for separable likninger (under antagelse om at $y(x) \neq 0$):

$$\begin{array}{lcl} \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} & = & \int 1\,dx \\ \sqrt{y} & = & x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ y(x) & = & (x+C)^2, \quad C \in \mathbb{R}, \end{array}$$

som er den generelle løsningen når $y(x) \neq 0$ (sjekk!). Initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir $C = 0$ (sjekk!), dvs. vi har spesiell løsning

$$y(x) = x^2.$$

Dermed har vi funnet *to* løsninger

$$y(x) = 0 \quad \text{og} \quad y(x) = x^2$$

som begge oppfyller (3.24). ■

Bemerkning 3.28 Konklusjonen vi trekker fra Eksempel 3.27 er at for separable difflikninger må vi være ekstra oppmerksomme (vi har jo påpekt at disse er vanskeligere å studere enn lineære difflikninger), men vi merker oss også at i anvendelsene vi skal se på vil det være klart hvilken løsning vi (eventuelt) er interesserte i.

Det er gjerne tilfellet der $y(x) = 0$ gir en 'ekstra' løsning, som vil forekomme, og funksjonen som er 0 i alle punkter er ikke den løsningen vi vanligvis er interesserte i. Merk dessuten at i Eksempel 3.26 trengte vi ikke å anta $y(x) \neq 0$ for å løse likningen, og vi fikk én løsning. ■

For første ordens *lineære* difflikninger (hvorav noen er separable) er ting mye enklere:

Teorem 3.29 *Anta at vi har en første ordens lineær difflikning*

$$y' + f(x)y = g(x), \quad x \in I$$

der f og g er kontinuerlige på et intervall I. La $t \in I$ og $s \in \mathbb{R}$. Da fins nøyaktig én løsning av difflikningen slik at

$$y(t) = s.$$

La oss ta et eksempel og deretter forklare hvorfor Teorem 3.29 stemmer:

Eksempel 3.30 I Eksempel 3.10 fant vi at difflikningen

$$y' + (\cos x)y = \cos x$$

har generell løsning

$$y(x) = 1 + Ce^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Denne likningen gjelder på hele $\mathbb{R}$ (så intervallet I er $\mathbb{R}$). La oss si at vi ønsker den spesielle løsningen der

$$y(0) = 2.$$

Ved Teorem 3.29 vet vi at denne oppplysningen vil gi oss nøyaktig én løsning. For å finne denne løsningen, regner vi ut at

$$y(0) = 1 + C = 2,$$

så $C = 1$, og vi får den spesielle løsningen

$$y(x) = 1 + e^{-\sin x}.$$

■

Som i eksemplet ovenfor, vil én betingelse i tillegg til difflikningen (alltid) gi oss én likning med én ukjent (integrasjonskonstanten C): Det er fordi vi har en løsningsformel for første ordens lineære difflikninger som sier at

$$y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} g(x)\, dx + e^{-F(x)} C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(fra punkt **5)** i løsningsmetoden). Løsningsformelen sier at C-leddet ikke forsvinner når vi setter inn et tall t, dvs. vi får alltid en likning der C er med (overbevis deg om dette!), og betingelsen $y(t) = s$ kan dermed brukes til å finne C ved å sette inn t og s.

Videre kan likningen med C aldri ha flere enn en løsning (prøv å overbevise deg om dette også ved hjelp av løsningsformelen!), dvs. vi har nøyaktig én løsning av initialverdiproblemet

$$y' + f(x)y = g(x), \quad y(t) = s,$$

som gir oss forklaringen på hvorfor Teorem 3.29 stemmer.

Ved hjelp av initialbetingelser plukker vi altså ut spesielle løsninger fra den generelle løsningen som består av uendelig mange løsninger. For første ordens likninger (som i Eksempel 3.26) trengs kun én opplysning for å finne en bestemt løsning.

For andre ordens likninger har vi to konstanter å bestemme, og vi vil da trenge to initialbetingelser for å bestemme disse:

Eksempel 3.31 Vi skal løse initialverdiproblemet

$$4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 2.$$

Den generelle løsningen fant vi i Eksempel 3.21, nemlig

$$y(x) = Ce^{\frac{x}{2}} + Dxe^{\frac{x}{2}}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Betingelsene $y(0) = 4$ og $y(1) = 2$ gir likningene

$$\begin{aligned} 4 &= C \cdot 1 + D \cdot 0 \cdot 1 \\ 2 &= Ce^{\frac{1}{2}} + D \cdot 1 \cdot e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da får vi med en gang at $C = 4$, og vi kan løse for D, som gir $D = 2e^{-\frac{1}{2}} - 4$. Den eneste funksjonen i verden (siden vi har løst et lineært likningssystem og fått én løsning) som oppfyller difflikningen $4y'' - 4y' + y = 0$, samt $y(0) = 4$ og $y(1) = 2$ er

$$y(x) = 4e^{\frac{x}{2}} + (2e^{-\frac{1}{2}} - 4)xe^{\frac{x}{2}}.$$

■

Hvis vi har en andre ordens difflikning som i Seksjon 3.3 med betingelser $y(m) = n$ og $y(t) = s$ der m, n, t og s er fritt valgte reelle tall (med $m \neq t$), får vi altså et lineært likningssystem med to likninger og to ukjente (C og D). Siden vi vil finne C og D, ønsker vi at dette systemet skal ha kun én løsning, men som kjent kan det hende at et slikt system har ingen eller uendelig mange løsninger (Kompendium 1). Dette vil imidlertid bare kunne skje i tilfellet **2)c)** (når den karakteristiske likningen har komplekse røtter):

Eksempel 3.32 I Eksempel 3.22 så vi at likningen

$$y'' - 4y' + 85y = 0$$

har generell løsning

$$y(x) = e^{2x}(C\cos(9x) + D\sin(9x)), \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

La oss si at vi er gitt betingelsene

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y(\pi) = 2. \tag{3.25}$$

Vi vil finne C og D, og regner ut at

$$y(0) = C = 0$$

fra den første betingelsen. Den andre betingelsen gir

$$y(\pi) = e^{2\pi}(-C) = 2,$$

noe som ikke gir mening hvis $C = 0$. Altså fins det ingen funksjon som oppfyller likningen samt de to betingelsene (3.25). ■

Bemerkning 3.33 I tilfellene der den karakteristiske likningen har to eller én reell rot, vil likningssystemet

$$\begin{cases} y(m) &= n \\ y(t) &= s \end{cases}$$

der $m \neq t$ alltid ha nøyaktig én løsning. Dette kan sjekkes ved å se at determinanten til koeffisientmatrisen til likningssystemet er forskjellig fra 0 (husk Kompendium 1) (gjør det!). ■

For å sikre oss at vi finner nøyaktig én løsning av et andre ordens initialverdiproblem også når den karakteristiske likningen har komplekse røtter, vil opplysningene om hva funksjonsverdien i et bestemt punkt er, samt hva den deriverte i det samme punktet er, være det som skal til (dette er opplysninger vi gjerne kan skaffe oss i anvendelser):

Teorem 3.34 *Anta at vi har en andre ordens lineær homogen difflikning med konstante koeffisienter*

$$y'' + by' + cy = 0,$$

og la m, n, og s være fritt valgte reelle tall. Da fins nøyaktig én løsning av difflikningen slik at

$$\begin{cases} y(m) &= n \\ y'(m) &= s. \end{cases}$$

Det er en fin oppgave å vise at betingelsene $y(m) = n$ og $y'(m) = s$ alltid garanterer at likningssystemet vi får for å bestemme C og D har nøyaktig én løsning (ved å se på determinanten til koeffisientmatrisen). (Husk at vi har de tre tilfellene **2)a)-c)** å sjekke.)

Eksempel 3.35 I Eksempel 3.32 kan vi nå for eksempel gi betingelsene

$$y(0) = 0 \quad \text{og} \quad y'(0) = 1.$$

Teorem 3.34 sier at vi nå skal finne nøyaktig én løsning. Vi regner ut at $C = 0$ fra $y(0) = 0$. Videre får vi

$$y'(x) = 2e^{2x}(C\cos(9x) + D\sin(9x)) + e^{2x}(-9C\sin(9x) + 9D\cos(9x))$$

så $y'(0) = 9D$ (siden $C = 0$) (sjekk!), dvs. $D = \frac{1}{9}$. Vi får dermed den spesielle løsningen

$$y(x) = \frac{1}{9}e^{2x}\sin(9x).$$

■

3.5 Retningsdiagram

Vi skal nå se hvordan vi kan visualisere løsningene til en **første ordens** difflikning (denne seksjonen gjelder bare for disse likningene) uten å løse likningen.

Vi betrakter her første ordens difflikninger som kan skrives på formen

$$y'(x) = F(x, y) \tag{3.26}$$

der $F(x, y)$ er en funksjon som avhenger av variablen x og den ukjente funksjonen y. Vi flytter gjerne alle ledd unntatt y' over på høyresiden for å få dette til.

Eksempel 3.36 Difflikningen

$$xy' - y = 0 \tag{3.27}$$

kan også skrives som $y' = \frac{y}{x}$, dvs. $F(x, y) = \frac{y}{x}$, forutsatt at $x \neq 0$. ■

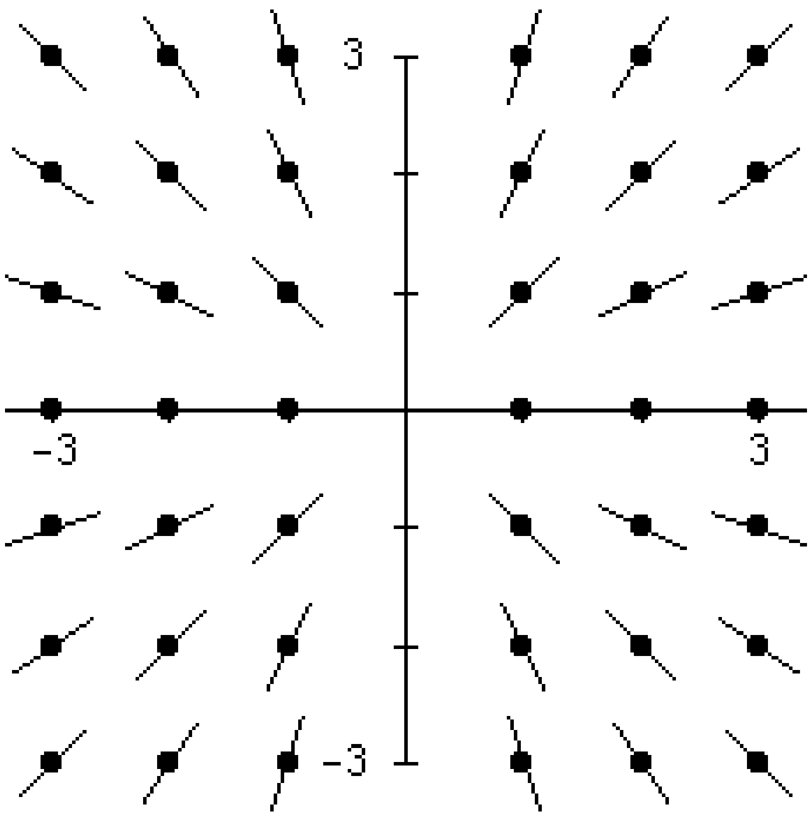
Når vi skriver likningen på formen (3.26), vil høyresiden dermed gi oss hva stigningstallet til tangenten til funksjonen $y(x)$ er i punktet (x, y). Hvis vi tegner små linjestykker i hvert punkt (kalt *retningslinjer*) med de tilsvarende stigningstallene får vi et såkalt *retningsdiagram* for difflikningen.

Retningsdiagrammet ('slope field' på engelsk) visualiserer hva diffliknin-gen sier, og hjelper oss til å kunne se for oss hvordan grafene til løsnings-funksjonene ser ut:

Eksempel 3.37 Vi vil nå studere løsningene til likningen (3.27), og skriver den på formen $y' = F(x, y)$. Da må vi anta $x \neq 0$, og vi får likningen

$$y' = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Setter vi inn punktet $(1, 1)$ får vi stigningstall 1. Setter vi inn punktet $(2, 1)$ får vi stigningstall $\frac{1}{2}$ osv. Vi kan dermed tegne retningsdiagrammet for denne likningen:



Hvis $y = x$ er stigningstallet konstant lik 1, og hvis $y = 2x$ er stign-ingstallet konstant lik 2 osv. Vi ser at løsningene vil bli linjer. I dette tilfellet kan vi sjekke dette ved å løse likningen slik vi har lært. Da får vi nettopp at løsningene er

$$y(x) = Cx, \quad C \in \mathbb{R},$$

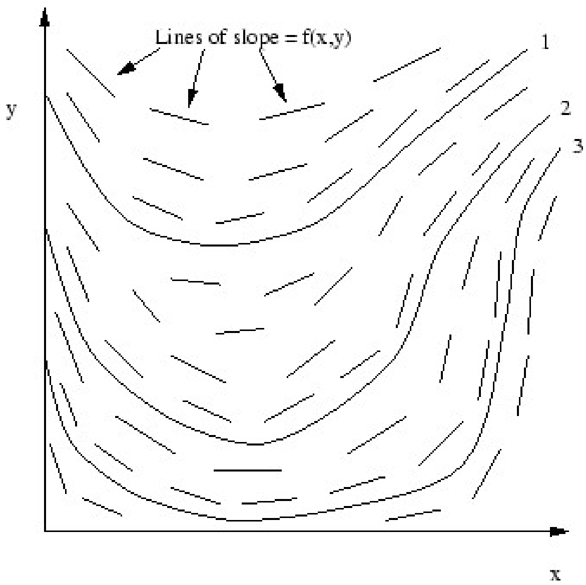
som er linjer gjennom origo. (Jfr. Eksempel 3.9: Vi har skjøtet sammen løsninger, og får én C.)

Merk: Løsningsfunksjonene er kontinuerlige for alle $x \in \mathbb{R}$ ($x = 0$ satt inn i likning (3.27) gir $y = 0$), selv om vi antok $x \neq 0$ underveis.

■

Løsningene til en difflikning er en familie av funksjoner (se illustrasjon i Eksempel 3.26). Grafene til disse funksjonene kalles løsningskurvene, eller *integralkurvene* til difflikningen.

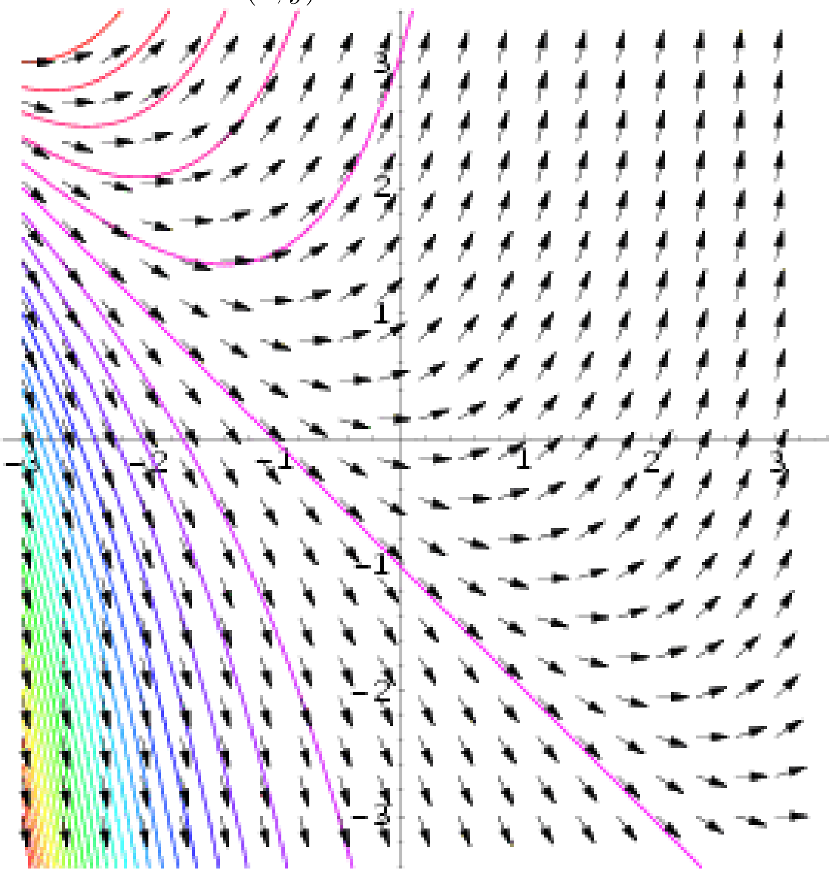
Ordet integral kommer av at vi løser difflikningen ved å integrere, dvs. antiderivere. Når vi har retningsdiagrammet, kan vi tegne inn integralkurvene (altså løsningene) ved å tegne kurvene som følger retningene gitt i retningsdiagrammet, som vist på neste tegning. Vi kan si at vi 'integrerer geometrisk': Vi vet forandringen i hvert punkt, og setter sammen forandringene til en graf som følger disse forandringene. (På tegningen: 'lines of slope' er retningslinjer, og tallene 1, 2, og 3 viser tre løsninger/integralkurver tegnet inn.)



Eksempel 3.38 Nedenfor er retningsdiagrammet til likningen

$$y' = x + y$$

(med pilhoder på linjestykkene) der noen av integralkurvene er tegnet inn for noen startverdier (x, y):



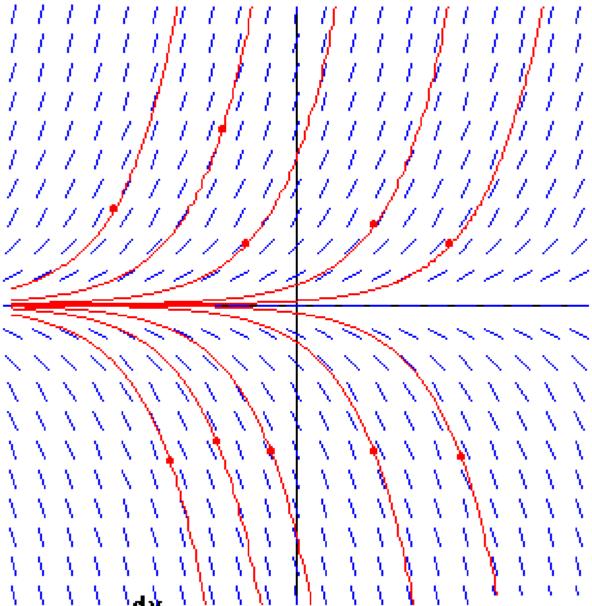
■

Vi tar med noen flere eksempler. Eksemplene er hentet fra

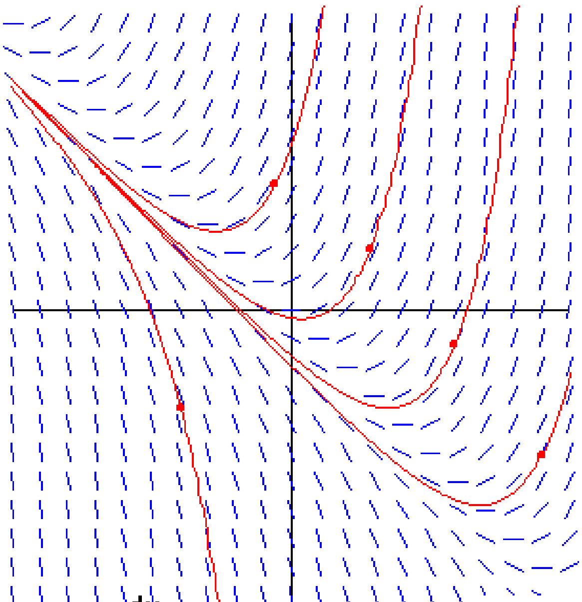
`http://www.ies.co.jp/math/java/calc/DiffEqu/DiffEqu.html`

hvor du kan taste inn funksjoner og tegne kurver selv. Anbefales!

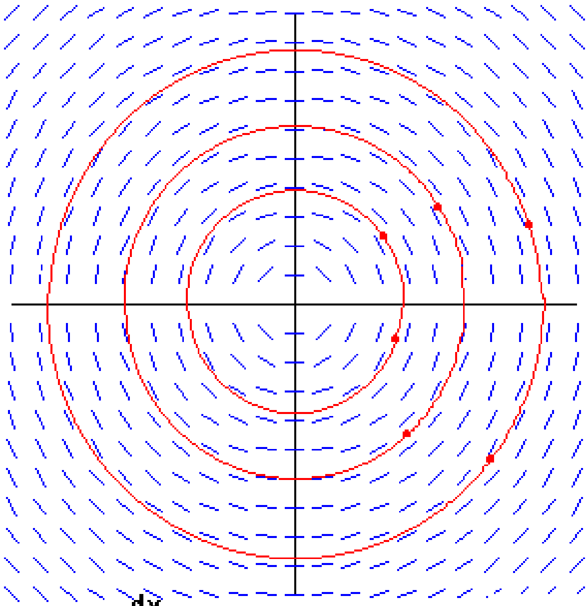
Merk forøvrig at linjene i de neste tegningene ikke krysser hverandre eller løper sammen, selv om det kan se slik ut!



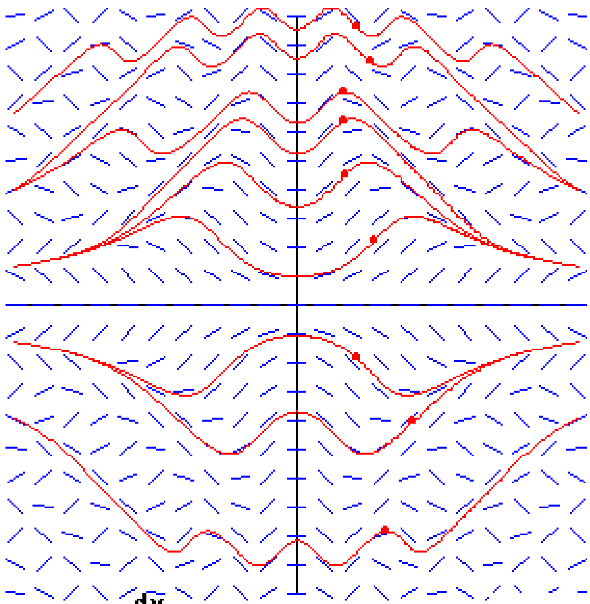
$\frac{dy}{dx} = y$



$\frac{dy}{dx} = y + x$



$\frac{dy}{dx} = -x/y$



$\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

3.6 Nå skal du kunne

- definisjonene av første ordens lineær difflikning, separabel difflikning og andre ordens lineær homogen difflikning med konstante koeffisienter og løse slike likninger (hvilke dere skal kunne løse begrenses av antideriveringsteknikkene dere har lært)

- definisjonene av generell og spesiell løsning, initialbetingelse og initialverdiproblem

- forskjellen på de ulike typene likninger vi har sett på når det gjelder å finne spesielle løsninger

- definisjonen av et retningsdiagram og tegne integralkurver

- kose deg med siste kapittel (selv om alle kompendiene er skrevet spesielt for deg, er neste kapittel skrevet ekstra spesielt for deg)

Kapittel 4

Modellering

> 'Let's pretend that you're the Red Queen, Kitty! Do you know, I think if you sat up and folded your arms, you'd look exactly like her. Now do try, there's a dear!" And Alice got the Red Queen off the table, and set it up before the kitten as a model for it to imitate: however, the thing didn't succeed, principally, Alice said, because the kitten wouldn't fold its arms properly.'

–"Through the Looking-Glass and What Alice Found There", Lewis Carroll

Noen av dere har kanskje modellert blomster, romskip eller noe annet i for eksempel kitt eller lego, og kanskje noen har bygd modellfly også.

Når vi bruker ordet *modell* i dette kurset er det imidlertid i betydningen *matematisk modell*:

```
En modell er en beskrivelse av virkeligheten
          i matematisk språkdrakt.
   Modellering er å lage slike modeller.
```

Vi har allerede sett mange eksempler og oppgaver der et fenomen har blitt modellert ved hjelp av matematikk. Vi nevner i fleng: overlevelse av bladlus, trafikknett i London, seertall til TV-program, nerveceller, ballsprett, telegrafsignaler, osv. Ved hjelp av modellen (gjerne en likning) kan vi bruke matematisk regneregler og svare på spørsmål knyttet til fenomenet.

I motsetning til matematiske problemer som spesiallages til eksempler og oppgaver, er matematiske problemer som dukker opp i det virkelige liv meget rotete. Anta at vi blir gitt et problem som vi skal lage en modell av. Hva gjør vi?

...Tenkepause... (tenk som en matematiker)

Jo,

1) kvitter oss med det vi anser som irrelevant informasjon,

2) prøver å formulere resten av informasjonen som et matematisk problem,

3) løser problemet i punkt **2)**.

Dette er i de fleste tilfeller lettere sagt enn gjort! Man må gjerne gå gjennom disse punktene mange ganger, men det viser seg å være verdt det:

Gode matematiske modeller er meget effektive for å beskrive virkeligheten, og således si noe om kompliserte situasjoner som vi vil forstå. **Dette gjelder ofte selv om vi må gjøre mange antagelser og kvitte oss med relevant informasjon underveis** ("vi ser bort fra tyngdekraften", "vi antar at ballongen er en kule", osv.), for selv om antagelsene virker langt fra virkeligheten vil de gjerne inneholde nok informasjon til at vi får en oversikt og forstår problemet. (Ta en titt på tidligere tekstoppgaver og eksempler i Kompendium 1 og 2 for å se hva slags antagelser vi har gjort i de ulike oppgavene!)

Forenklinger er altså helt nødvendig. Hvis vi for eksempel ønsker å modellere trafikken i en spesiell retning på en middels trafikkert vei et sted i Norge, kan vi modellere veibanen ved hjelp av x-aksen i positiv retning, og la punktet x_i på aksen være bil nummer i. Vi kan for eksempel la punket x_i være midtpunktet på bilen, og videre for eksempel anta at alle biler er like lange. Når du observerer denne veien vil hver bil, dvs. hvert punkt, ha en hastighet osv.

Veldig ofte vil de matematiske problemene vi formulerer i punkt **2)** ovenfor involvere difflikninger. Rett og slett fordi funksjoner jo gir oss sammenhengen mellom ulike størrelser, og problemer ofte innebærer at vi vet noe om hvordan størrelser forandrer seg i forhold til hverandre, dvs. vi har en sammenheng mellom en funksjon og dens deriverte (forandringer): en difflikning!

Vi skal straks ta for oss endel eksempler, men først tar vi med noen bemerkninger:

- I oppgavene vil de antagelsene som skal gjøres stort sett være gitt, og vi skal sette opp modellen/likningen ut fra disse, dvs. vi skal ikke se så mye til selve modelleringsprosessen. Til det trenger man å være ekspert på fenomenet som studeres.

  I noen oppgaver kan det imidlertid hende at vi må gjøre noen antagelser. Til dette skal vi ikke trenge spesialkunnskap om fenomenet den enkelte oppgaven dreier seg om, men det gjelder (som det gjør i alle oppgaver!) å sette seg litt inn i situasjonen/fenomenet oppgaven dreier seg om.

  Mottoet er å være aktiv i forhold til oppgaven, dvs. ta kontroll over situasjonen. En passiv holdning tilsier at man bare regner uten å tenke –ikke gjør det!

- En modell vil gjerne inneholde endel parametere og konstanter, dvs. vi må regne mye med symboler underveis, der vi leker oss med å sette inn ulike tall til slutt (for å se om modellen passer med det vi observerer, og eventuelt tilpasse modellen, eller for å gi et svar på et problem).

  Parametere er som vi vet variable som varierer innenfor et problem; hvis vi for eksempel studerer en bevegelse kan friksjon være en parameter. Ved å variere friksjonen (sette inn tallverdier for denne i løsningsformelen vi har funnet) kan vi studere bevegelsen nærmere. Konstanter kan vi som kjent bestemme ved initialbetingelser (input i modellen).

- Modellering er det de fleste som forsker innen realfag driver med; enten ved å eksperimentere ved en datamaskin, i et laboratorium eller med blyant og papir.

  Mange modeller, for eksempel difflikninger, har egne navn etter personer/fenomener. For eksempel kan alle fysikkens lover skrives som difflikninger, og disse lovene har navn. Vi skal bl.a. treffe modeller som Newtons andre lov, Newtons avkjølingslov, Hookes lov, Rutherford-modellen og logistisk vekstmodell. Vi kan også lage egne navn, som vi gjør i noen av eksemplene.

Vi skal nå ta for oss endel eksempler og oppgavetyper. Tenk gjerne på om modellene vi bruker er gode eller dårlige (ville du ha gjort andre antagelser for å modifisere modellen?).

4.1 Eksempler

Eksempel 4.1 Læringsmodell
En student skal starte på et nytt kurs og har ingen forkunnskaper i kurset. Vi ønsker å studerer endringene i studentens kunnskaper. Vi innfører funksjonen $K = K(t)$ som er studentens kunnskapsmengde i kurset t måneder etter oppstart og vi lar P være pensum, dvs. den totale kunnskapsmengden studenten skal lære i kurset.

Vi ser på en læringsmodell som sier at mengden av nytt stoff som blir lært per tidsenhet er proporsjonal med det som gjenstår å lære (noen tolker dette som å jobbe jevnt).

La oss finne ut hva denne modellen sier om hvor stor studentens kunnskap er til eksamen, 4 måneder etter oppstart, når vi får oppgitt at studenten kan halvparten av pensum i kurset etter 1.5 måneder:

I løpet av et lite tidsrom fra t til $t+\Delta t$, er endringen i kunnskapsmengden i kurset, dvs. mengden av nytt stoff, $K(t+\Delta t) - K(t)$. Denne endringen kan også, i følge modellen, uttrykkes som $m(P-K(t))\Delta t$ der m er en proporsjonalitetskonstant (overbevis deg om dette!). Vi får altså

$$K(t + \Delta t) - K(t) = m(P - K(t))\Delta t.$$

Vi deler nå med Δt og lar Δt gå mot null. Uttrykket på venstresiden er da

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t}.$$

Det gir dermed difflikningen

$$K'(t) = m(P - K(t)). \tag{4.1}$$

Denne likningen er første ordens lineær, og vi har sett hvordan vi kan løse slike likninger ved å bruke en integrerende faktor, som her blir e^{mt}. (Likningen er også separabel, men det lar vi være å bruke her.) Løsningene til likning (4.1) blir dermed

$$K(t) = P + Ce^{-mt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Når vi bruker opplysningen om ingen forkunnskaper, dvs. $K(0) = 0$, får vi $C = -P$. Dermed er funksjonen som gir studentens kunnskaper i kurset t måneder etter oppstart, basert på jevn jobbing, gitt ved

$$K(t) = P - Pe^{-mt}.$$

Som vi har sett før, kan vi bruke tilleggsopplysningen $K(1.5) = \frac{1}{2}P$ til å bestemme m; det gir:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}P &= P(1 - e^{-1.5m}) \\
\tfrac{1}{2} &= e^{-1.5m} \\
\ln\tfrac{1}{2} &= -1.5m \\
m &= \tfrac{\ln 2}{1.5},
\end{aligned}$$

så

$$K(t) = P(1 - e^{-\frac{\ln 2}{1.5}t}).$$

Hvor mye studenten kan etter 4 måneder (når det er eksamen) er derfor:

$$K(4) = P(1 - e^{-\frac{\ln 2}{1.5}4}) = P(1 - \frac{1}{2^{\frac{8}{3}}}) \approx 0.843P.$$

Dvs. at studenten kan ca. 84.3% av pensum til eksamen etter denne modellen.

Så kan man jo spørre om dette er en god/dårlig læringsmodell. Det får bli en sak for pedagogene(?). ■

Difflikninger er altså en sammenheng mellom en funksjon og dens deriverte. I mange av eksemplene og oppgavene vi har sett (og vil se) har sammenhengen **proporsjonal** dukket opp.

Vi noterer oss at hvis $a \propto b$ så er $a^r \propto b^r$ for $r \in \mathbb{R}$ (sjekk!).

Bemerkning 4.2 Proporsjonalitetskonstanter velges positive, og vi bruker fortegn for å si noe om forandringen er positiv eller negativ. ■

Eksempel 4.3 Møllkulemodell
I Oppgave 31 om møllkula som fordamper får vi oppgitt følgende:

'Ei møllkule fordamper med en hastighet som er proporsjonal med overflaten til kula. Under fordampingen kan massen til møllkula beskrives ved difflikningen

$$M'(t) = -kM(t)^{\frac{2}{3}} \tag{4.2}$$

der $M(t)$ er massen til møllkula etter t døgn målt i gram, og $k > 0$.'

La oss se litt nærmere på hvorfor difflikningen (4.2) er en god modell for møllkulas masse.

Vi har altså gjort antagelsen om at hastigheten er proporsjonal med overflaten (som er $4\pi r^2$ for en kule med radius r). Denne antagelsen er basert på fysiske eksperimenter med møllkuler, og den gir at

$$M'(t) \propto r^2. \tag{4.3}$$

Forholdet mellom masse og volum kalles tetthet, og vi må anta at tettheten her er konstant (når ikke tetthet er oppgitt, antas den gjerne konstant), dvs. at massen er proporsjonal med volumet (som er $\frac{4}{3}\pi r^3$ for en kule med radius r), så

$$M(t) \propto r^3. \tag{4.4}$$

Setter vi sammmen (4.3) og (4.4), får vi

$$\begin{aligned}
M'(t) &\propto r^2 \\
M'(t)^{\frac{3}{2}} &\propto r^3 \\
M'(t)^{\frac{3}{2}} &\propto M(t) \quad \text{(fra (4.4))} \\
M'(t) &\propto M(t)^{\frac{2}{3}},
\end{aligned}$$

som gir difflikningen (4.2):

$$M'(t) = -kM(t)^{\frac{2}{3}}$$

der proporsjonalitetskonstanten $k > 0$ og vi har negativt fortegn siden forandringen er negativ (møllkulas masse avtar). ■

Vi har allerede møtt eksponentiell vekst, både positiv og negativ. Når et fenomens oppførsel følger en slik vekst, har det relativ vekstrate $r > 0$. For positiv vekst har vi da funksjonen Ce^{rt} og for negativ vekst har vi Ce^{-rt}.

Eksempel 4.4 Rutherfordmodellen
På begynnelsen av 1900-tallet/slutten av 1800-tallet ble fenomenet radioaktivitet oppdaget av fysikeren Rutherford. Sammen med sine kollegaer viste han at atomene i et såkalt radioaktivt stoff er ustabile og brytes ned helt spontant. Rutherford viste også at radioaktiviteten er proporsjonal med antall atomer vi har igjen av stoffet.

La $y(t)$ være massen til et radioaktivt stoff ved tiden t. Siden antall atomer vi har igjen av stoffet er proporsjonal med massen, sier Rutherfords modell at

$$y'(t) = -ky(t) \tag{4.5}$$

der $k > 0$ og vi har negativt fortegn siden massen avtar. Husk at $y'(t)$ kalles vekstraten. Her kan det også gi mening å kalle den *radioaktivitetsraten*.

Løsningene av (4.5) er

$$y(t) = Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R},$$

der $y(0) = C$. Hvis vi kaller startmassen for m (vi bytter altså bokstav fra C til m, siden vi nå gir m en spesiell rolle, mens C kun er en vilkårlig konstant), får vi spesiell løsning

$$y(t) = me^{-kt}.$$

Vi vet at

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

siden eksponenten med t er negativ, så modellen sier at massen går mot 0 over tid (men at den aldri blir 0!).

Den relative radioaktivitetsraten k er en parameter i modellen og varierer fra stoff til stoff. Hvis k er stor, brytes stoffet raskt ned. En måte å bestemme k på er å bruke halveringstiden til stoffet. For eksempel er halveringstiden for *karbon-14* 5568 år, for *torium-230* 80 000 år, for *torium-234* 24 dager, *radium-226* 1600 år, *bly-210* 22 år, mens *bly-206* ikke er radioaktivt (se liste over flere stoffer i for eksempel Brauns bok, se Tillegg D).

La oss si at vi nå graver frem et trestykke (på bestefars jorde) der forskere kan si at *karbon-14*-aktiviteten er 80% av startaktivitetet. (Aktivitet kan godt måles ved hjelp av masse.) Da kan vi regne ut hvor gammelt trestykket er (og imponere bestefar):

La $y(t)$ være *karbon-14*-aktiviteten i trestykket ved tiden t. Når treet felles stopper inntaket av *karbon-14* (i fotosyntesen) og mengden *karbon-14* avtar etter Rutherfordmodellen. Vi har dermed

$$y(t) = me^{-kt}, \quad \text{der } m = y(0).$$

Vi bestemmer k fra halveringstiden 5568 år:

$$\frac{1}{2}m = me^{-k5568}$$

gir

$$k = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{5568} = \frac{\ln 2}{5568}$$

(sjekk!). Dermed kan vi finne t når $y(t) = 0.8m$:

$$0.8m = me^{-\frac{\ln 2}{5568}t}$$

som gir

$$t = \frac{\ln 0.8}{-\frac{\ln 2}{5568}} \approx 1792,$$

så trestykket er rundt 1792 år gammelt.

I Brauns bok (Tillegg D) kan du også lese om hvordan man bruker radioaktivitet til å avsløre forfalskninger i kunstverdenen! ■

Det var litt mer om eksponentiell vekst. Veldig ofte er denne veksten for 'brutal': For eksempel er jo $\lim_{t\to\infty} Ce^{rt} = \infty$ for $C, r > 0$.

I mange tilfeller, spesielt for populasjoner, vil en eksponentiell vekst ikke være realistisk når $t \to \infty$. Vi ønsker en modell som tar hensyn til at en populasjon har en viss '*bærekapasitet*' (som sier noe om hva populasjonen tåler, for eksempel med hensyn på tilgang på mat). En realistisk modell bør dermed 'flate ut' og nærme seg denne bærekapasiteten nå $t \to \infty$. Vi sier at vi har en *logistisk vekstmodell*. Vi tar et eksempel der bærekapasiteten vil være antall personer i populasjonen vi studerer:

Eksempel 4.5 Ryktespredning
La oss studere ryktespredning i en populasjon med P individer, dvs. hvor fort spres et rykte? I en slik situasjon vil det ikke gi mening at antallet som kjenner til ryktet går mot ∞ ettersom tiden går, men tvert imot bør antallet nærme seg P.

La $y(t)$ være antall individer i populasjonen som kjenner ryktet ved tiden t. **En vanlig modell for ryktespredning er en logistisk vekstmodell, dvs. å anta at $y'(t)$ er proporsjonal med produktet av antall individer som kjenner ryktet og antall individer som ikke gjør det.**

Dette gir
$$y'(t) = ky(t)(P - y(t)) \tag{4.6}$$
der $k > 0$ og vekstraten $y'(t)$ er positiv (siden antallet som kjenner ryktet øker). I denne forbindelsen er det naturlig å kalle $y'(t)$ for *spredningsraten*.

Denne modellen har noen spennende egenskaper. For eksempel kan vi finne ut *når spredningsraten er størst* (hva tror du?) (Legg merke til hvordan vi finner dette; det dukker av og til opp som et spørsmål på eksamen.):

For å finne når $y'(t)$ er størst, må vi i dette tilfellet finne ut når funksjonen f gitt ved
$$f(x) = kx(P - x)$$

har sitt maksimum (overbevis deg om dette!). Dermed må vi derivere f:

$$f'(x) = k(P-x) - kx = kP - 2kx.$$

Ved å se når f' skifter fortegn kan vi finne et mulig maksimum. Likningen

$$kP - 2kx = 0$$

gir $x = \frac{P}{2}$, og du kan sjekke at f' skifter fortegn fra positivt til negativt i dette punktet (gjør det!), dvs. at f har et maksimum her. Så $y'(t)$ har et maksimum for $y(t) = \frac{P}{2}$. Når halvparten av populasjonen kjenner ryktet er spredningsraten størst!

Dermed er det mest interessant å se hva som skjer etter at halvparten kjenner ryktet, dvs. det er mest nærliggende å sette

$$y(0) = \frac{1}{2}P.$$

La oss dermed finne et uttrykk for $y(t)$: Vi antar $y(t) \neq 0$ og $(P - y(t)) \neq 0$ (funksjonene $y(t) = 0$ og $y(t) = P$ er løsninger av selve likningen, men passer ikke med initialbetingelsen) og får (sjekk antideriveringen ved hjelp av delbrøksoppspalting!):

$$\begin{array}{rcl}
y' & = & ky(P-y) \\
\frac{y'}{y(P-y)} & = & k \\
\frac{1}{P}\int(\frac{1}{y} + \frac{1}{P-y})\,dy & = & \int k\,dt \\
\frac{1}{P}(\ln|y| - \ln|P-y|) & = & kt + C \\
\ln|\frac{y}{P-y}| & = & Pkt + C \quad (\text{ny } C) \\
\frac{y}{P-y} & = & Ce^{Pkt} \quad (\text{ny } C) \\
y & = & PCe^{Pkt} - Ce^{Pkt}y \\
y(1 + Ce^{Pkt}) & = & PCe^{Pkt} \\
y(t) & = & \frac{PCe^{Pkt}}{1+Ce^{Pkt}}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Betingelsen $y(0) = \frac{1}{2}P$ gir nå $C = 1$ (sjekk!), så vi får spesiell løsning

$$y(t) = \frac{Pe^{Pkt}}{1 + e^{Pkt}}.$$

Da kan vi finne grenseverdien

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Pe^{Pkt}}{1 + e^{Pkt}} = \lim_{t\to\infty} \frac{P}{e^{-Pkt} + 1} = P,$$

som var det vi ønsket ($y(t)$ blir strengt tatt aldri lik P (selv om vi får små desimaltall som nærmer seg P, et helt tall), men det kan også passe med at det gjerne alltid er noen som ikke får med seg et rykte).

Funksjonen $y(t)$ sier altså noe om ryktespredningen i en populasjon. Konstanten k er en parameter som vil varierer fra populasjon til populasjon, og være et mål på hvor 'pratesyke' individene i populasjonen er; jo større k, jo fortere spres ryktet.

For eksempel kan man spørre seg hvor lang tid det vil ta fra halvparten av MAT1001-studentene kjenner til en trykkfeil i fasiten til 80% gjør det (hvis det ikke annonseres på kurssiden). Da må vi engasjere en forsker i sosiologi som kan si hva k bør være for populasjonen av MAT1001-studenter. ■

Eksempel 4.6 Frie svingninger

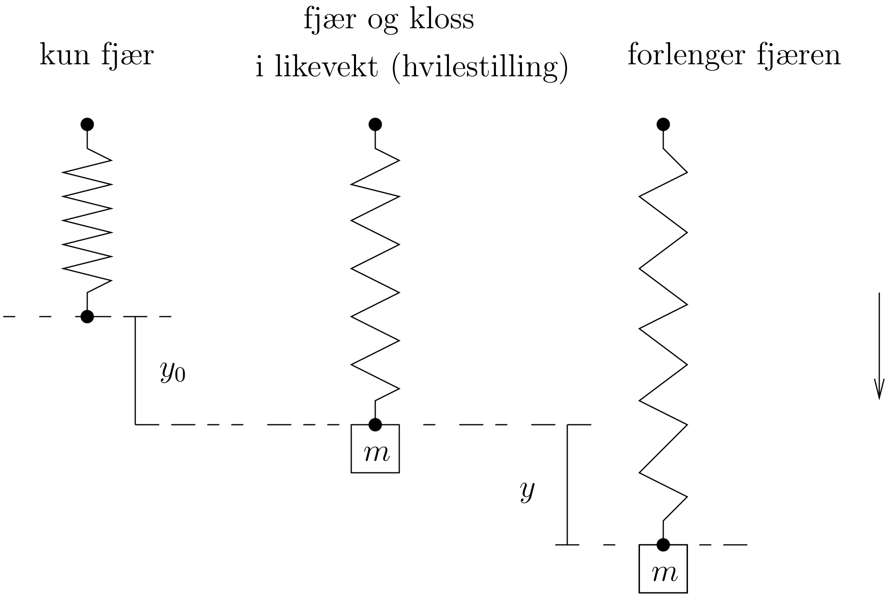
Vi har sett at for andre ordens lineære homogene difflikninger med konstante koeffisienter får vi trigonometriske funksjoner som løsninger når den karakteristiske likningen har komplekse røtter. Hva slags situasjoner modelleres med denne typen likninger?

Andre ordens difflikninger er en sammenheng mellom en funksjon og dens første og andre deriverte. Typiske situasjoner som kan modelleres med andre ordens difflikninger er dermed situasjoner der vi vet noe om sammenhengen mellom en gjenstands tilbakelagte strekning over en tid t ($y(t)$), gjenstandens hastighet ($y'(t)$) og dens akselerasjon ($y''(t)$). Det betyr at vi kan lete blant fenomener der **bevegelse** er det vi vil studere.

Bevegelseslærens grunnlov, også kalt Newtons andre lov, er en modell for bevegelse. La oss se litt nærmere på hvordan vi kan bruke Newtons andre lov til å beskrive frie svingninger ved trigonometriske (periodiske) funksjoner. Dette er nyttig i for eksempel all slags støtdemping (måling av jordskjelv, motorcross-seter, biler, våpen osv.). Vi prøver oss altså på en fysisk anvendelse, og vil forklare alt vi trenger underveis.

Newtons andre lov sier at for å forandre fart eller retning på en gjenstand, trengs det krefter. Mer presist sier den at summen av kreftene som virker på en gjenstand er lik produktet av gjenstandens masse og dens akselerasjon, og akselerasjonen har samme retning som summen av kreftene.

Vi skal bruke dette for å studere svingningene til en kloss med masse m som er hengt opp i en fjær og som settes i bevegelse ved at vi drar klossen et stykke nedover (forlenger fjæren) og så slipper taket.



Når vi skal beskrive denne situasjonen, må vi, som kjent, gjøre noen antagelser. I vår modell/beskrivelse antar vi

- at fjæren er masseløs og
- at klossen er utsatt for tre krefter; tyngdekraften mg (der g er gravitasjonskonstanten), fjærkraften F_f og luftmotstand (friksjon) L.

Siden noe settes i bevegelse, kommer altså Newtons andre lov inn i modelleringen, men siden vi har en fjær med i bildet, kommer også Hookes lov inn. Hookes lov er også en modell. Den beskriver kraften F_f som en fjær trekker/trykker med når den er forkortet/forlenget en strekning y fra sin hvilestilling, og sier

$$\boxed{F_f = -ky.}$$

Faktoren k er en konstant (kalt fjærkonstanten, som varierer fra fjær til fjær), og minustegnet skyldes at kraften er rettet motsatt av forlengelsen/forkortelsen.

Vi skal regne med at *luftmotstanden (friksjon) alltid er proporsjonal med hastigheten* v, så

$$\boxed{L = -qv,}$$

der minustegnet igjen skyldes at kraften er rettet mot hastigheten.

Vi starter med å se på fjæren og klossen når de er i ro (systemets likevektsstilling). Hvis vi lar y_0 være fjærens forlengelse etter at vi har hengt på klossen (se tegning), gir Newtons andre lov

$$mg - ky_0 = 0 \tag{4.7}$$

siden det bare er tyngdekraft og fjærkraft som virker på klossen i likevektsstillingen, og akselerasjonen er lik 0.

Så ser vi på hva som skjer når systemet er satt i bevegelse (se tegning, positiv retning nedover): Når klossen har et utslag y fra likevektsstillingen med fart v, er summen F av kreftene som virker på klossen

$$F = mg + F_f + L = mg - k(y + y_0) - qv.$$

Fra (4.7) får vi

$$F = -ky - qv,$$

som ifølge Newtons andre lov også er ma, der a er klossens akselerasjon. Altså:

$$ma = -ky - qv.$$

Vi bruker at $v = y'$ og $a = y''$, og får difflikningen

$$my'' = -ky - qy',$$

som også kan skrives

$$\boxed{y'' + \frac{q}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0.} \tag{4.8}$$

Under våre antagelser, blir dermed modellen for klossens svingninger likningen (4.8), som er en andre ordens lineær homogen difflikning med konstante koeffisienter!

Vi kan nå løse likningen, tegne løsningskurvene, og få et bilde av hvordan klossen vil svinge, avhengig av størrelsene på k, m og q. Dette vil gi oss tilfellene harmoniske (eller udempede) svingninger, dempede svingninger og kritisk og overkritisk dempede svingninger.

De fire typene svingninger kommer av at (4.8) gir oss fire interessante tilfeller, alt etter hva slags røtter den karakteristiske likningen har (vanligvis har vi tre tilfeller, men som vi skal se vil det her være naturlig å skille ut et eget tilfelle der de komplekse røttene er imaginære tall).

Difflikningen (4.8) har karakteristisk likning

$$r^2 + \frac{q}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

med røtter

$$r = \frac{-\frac{q}{m} \pm \sqrt{\frac{q^2}{m^2} - \frac{4k}{m}}}{2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4mk}}{2m}. \tag{4.9}$$

I de ulike løsningsformlene (som vi tar for oss i hvert tilfelle) får vi som kjent to konstanter C og D. De kan bestemmes i hver situasjon ut fra opplysninger om startposisjon $y(0)$ (her lik 0) og utgangshastighet $y'(0)$.

Imaginære røtter: Oppnås når $q = 0$ (ingen luftmotstand/friksjon). Da er

$$r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

og løsningene på modellen/difflikningen er

$$y(t) = C\cos(t\sqrt{\frac{k}{m}}) + D\sin(t\sqrt{\frac{k}{m}}), \quad C, D \in \mathbb{R},$$

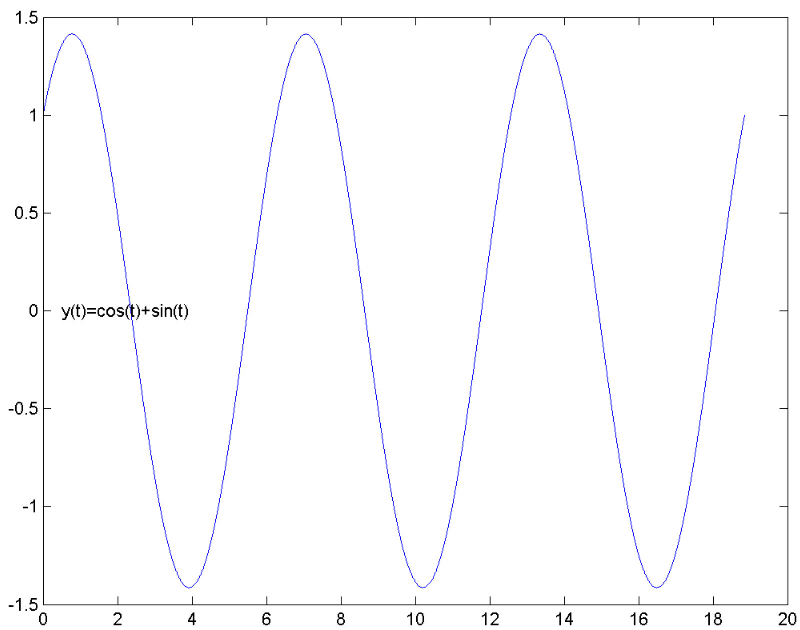
som vi vet kan skrives på faseform (se (1.5))

$$y(t) = A\cos(t\sqrt{\frac{k}{m}} - \phi)$$

der A og ϕ er bestemt av C og D.

Når $q = 0$ er dermed klossens bevegelse gitt ved en **harmonisk (udempet) svingning**! (som fortsetter evig siden vi ikke har noen luftmotstand).

Som et eksempel har vi her tegnet $y(t) = \cos t + \sin t$ for $t \in [0, 6\pi]$ (dvs. vi har satt konstantene C, D, k og m lik 1). <u>**Merk:**</u> Hvis vi tenker oss klossens bevegelse som grafen, husk at klossens bevegelse *nedover* tilsvarer positive y-verdier.



Komplekse røtter får vi når $q^2 - 4mk < 0$ (fra (4.9)). Siden q er positiv har den karakteristiske likningen til (4.8) komplekse røtter når

$$0 < q < 2\sqrt{mk}. \tag{4.10}$$

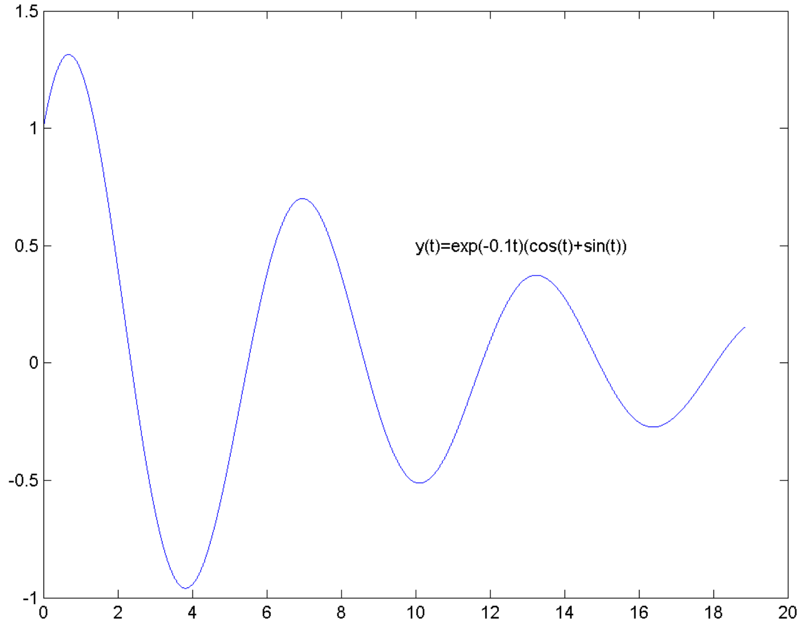
Det gir følgende løsninger på modellen (4.8):

$$y(t) = e^{-\frac{q}{2m}t}(C\cos((\frac{\sqrt{q^2 - 4mk}}{2m})t) + D\sin((\frac{\sqrt{q^2 - 4mk}}{2m})t), \quad C, D \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Faktoren med cosinus- og sinusleddet kan igjen skrives på faseform, og uttrykket for $y(t)$ ligner også på en harmonisk svingning, bortsett fra at 'amplityden' nå er gitt ved $\sqrt{C^2 + D^2}e^{-\frac{q}{2m}t}$, dvs. den avhenger av t og vi ser at den blir mindre og mindre når tiden går

Selve formelen (4.11) trenger man ikke huske, men det som er viktig er altså at den harmoniske svingningen nå multipliseres med en eksponentialfunksjon, som går mot 0 når $t \to \infty$ (siden eksponenten er negativ). Dette gir en **dempet svingning**. Når parameterne q, m og k oppfyller (4.10), vil klossen svinge frem og tilbake og samtidig nærme seg likevekten ($y(t) = 0$).

Som et eksempel på en dempet svingning har vi tegnet y gitt ved $y(t) = e^{-0.5t}(\cos(t) + \sin(t))$ for $t \in [0, 6\pi]$:

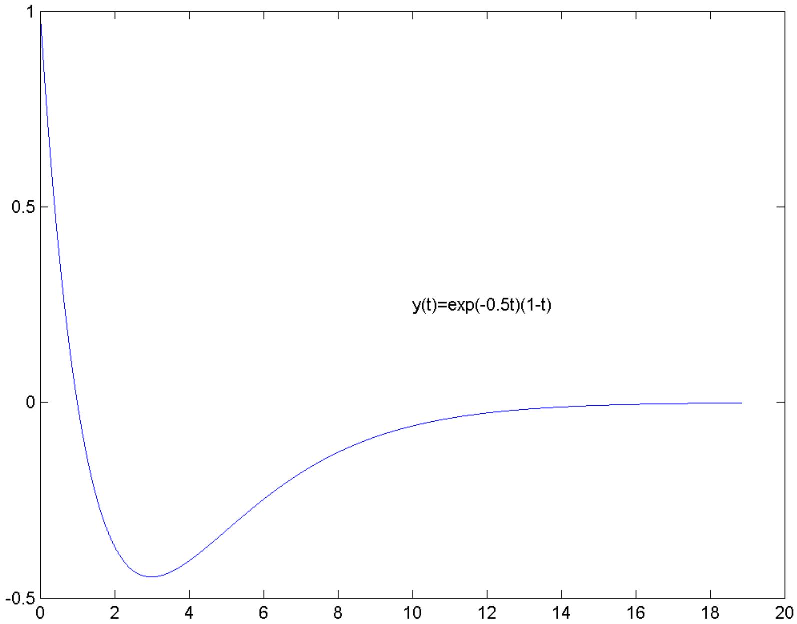


Én reell rot: Fra (4.9) ser vi at dette tilfellet inntreffer når $q = 2\sqrt{mk}$. Det gir følgende løsninger av (4.8):

$$y(t) = e^{-\frac{q}{2m}t}(C + Dt), \quad C, D \in \mathbb{R}$$

Eksponentialfunksjonen vil igjen sørge for at $y(t)$ går mot likevektstilstanden, og litt avhengig av hva q, k og m er (men slik at $q = 2\sqrt{mk}$), vil klossen passere likevekt høyst én gang. Den vil ikke svinge frem og tilbake, men vil raskt nærme seg likevekt ($y(t) = 0$), og vi har en **kritisk dempet svingning**.

Som et eksempel på en kritisk dempet svingning har vi tegnet y der $y(t) = e^{-0.5t}(1 - t)$ for $t \in [0, 6\pi]$:



To reelle røtter: Inntreffer når $q > 2\sqrt{mk}$. Da får vi løsninger

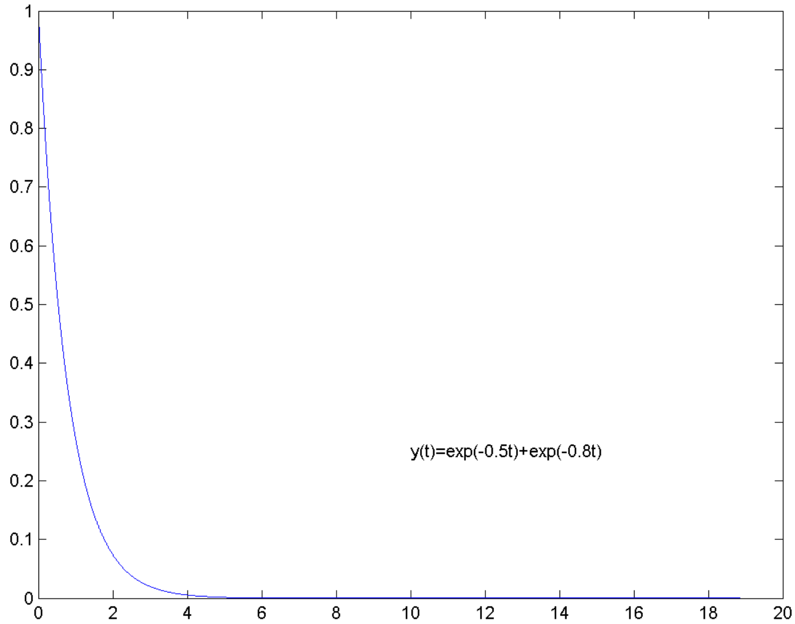
$$y(t) = Ce^{r_1 t} + De^{r_2 t}, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

der

$$r_1 = -\frac{q}{2m} + \sqrt{(\frac{q}{2m})^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{og } r_2 = -\frac{q}{2m} - \sqrt{(\frac{q}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$$

Siden røttene er negative (sjekk!), vil $y(t)$ gå mot 0 når $t \to \infty$. Klossen vil nå ikke en gang passere likevekt, men gå raskt mot likevekt, og vi sier at vi har en **overkritisk dempet svingning**. Vi merker oss at for eksempel våpen konstrueres gjerne med overkritisk demping, siden man ønsker seg raskt tilbake til utgangsposisjonen for å fyre av igjen så raskt som mulig. For å oppnå dette må vi konstruere et fjærsystem der q, m og k er slik at $q > 2\sqrt{mk}$.

Som eksempel på en overkritisk dempet bevegelse har vi tegnet grafen til y der $y(t) = e^{-0.5t} + e^{-0.8t}$ for $t \in [0, 6\pi]$:



■

4.2 Nå skal du kunne

- vite hva det vil si å modellere et problem
- vite hva en logistisk vekstmodell sier, herunder begrepet bærekapasitet
- så mye matematikk at du kan innta en aktiv rolle i forhold til tekstoppgaver og løse dem ved hjelp av din matematisk verktøykasse
- sjonglere lineære likningssystemer, differenslikninger og differensiallikninger, og problemer som gir opphav til disse, og dermed ha sjansen til å få A i kurset MAT1001

Tillegg A

Oppgaver

A.1 Kapittel 1

Oppgave 1 Hva er definisjonsmengden til følgende funksjoner?

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$

c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$

d) $f(x) = \ln|x| + 2\sin x$

e) $f(x) = 2x^{\frac{4}{5}} - e^x$

f) $f(x) = 16x^{\frac{9}{8}} - x^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}\tan x$

Oppgave 2 Angi verdimengden til følgende funksjoner.

a) $f(x) = x + x^{\frac{3}{7}} - 2x^{\frac{3}{4}}$

b) $f(x) = 2\sin x$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + x^3$

d) $f(x) = e^x + 2x^{\frac{3}{4}}$

e) $f(x) = \frac{3}{2}\tan x - 4\ln x$

f) $f(x) = 2|x| + 1$

g) $f(x) = 3\cos x + 8$

Oppgave 3 Finn grenseverdiene.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2 + 2x + 7}{\sqrt{x} - 4x^2}$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + \sqrt{x} + e^{x^2}}{7 + \sin(\sqrt{x})}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x^3}{8 + 7x^2}$$

Oppgave 4 Finn grenseverdiene.

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x(3^x + 8)}{3^x(2^x - 5)}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{4}{x} + \frac{3^x(2^x + 15)}{4^x(3^x + 2^x + 1)})$$

Oppgave 5 Eksisterer følgende grenseverdier? Begrunn svaret ditt.

a)

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \tan x$$

Oppgave 6 Finn største og minste verdi til funksjonen

$$f(t) = 6 - \cos\frac{\pi}{7}(t+6).$$

Oppgave 7 Finn sirkelfrekvens og periode til følgende funksjoner. Skisser deretter funksjonenes grafer uten bruk av kalkulator.

a) $f(t) = \cos(2t)$

b) $f(t) = 2\cos(\frac{\pi}{13}t)$

c) $f(t) = 3\sin(8(t-2))$

d) $f(t) = 6 + 2\cos(\frac{3\pi}{7}(t+9))$

Oppgave 8 Finn middelverdi, amplityde, periode og akrofase til følgende funksjoner. Skisser deretter funksjonenes grafer uten bruk av kalkulator.

a) $f(t) = 3 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}(t-2))$

b) $f(t) = -1 + \cos(2\pi(t-3))$

c) $f(t) = \cos(2\pi t - \pi)$

Oppgave 9 Finn middelverdi, amplityde, periode og akrofase til følgende funksjoner.

a) $f(t) = \sin(\frac{4\pi}{5}(t + \frac{\pi}{2}))$

b) $f(t) = -\frac{1}{2} + 3\cos(\pi(2t-2))$

c) $f(t) = \pi + \frac{1}{2}\cos(2\pi(-\frac{\pi}{2} + \pi t))$

d) $f(t) = -\frac{1}{\pi} + \cos(-2 + \frac{4}{\pi}t)$

Oppgave 10 Skriv uttrykket på formen $A\cos(dx + \phi)$, dvs. på faseform:

a) $\cos x - \sin x$

b) $-\sqrt{3}\cos(3x) + 3\sin(3x)$

c) $-\cos\frac{x}{4} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{4}$

Oppgave 11 Vis formelen

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y.$$

(Hint: Bruk komplekse tall og at $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$.)

A.2 Kapittel 2

Oppgave 12 Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^2(x^3+2)$

b) $g(x) = \ln(x^2+5) - x^7$

c) $h(x) = 3\ln(\frac{1}{x}) - \pi, \quad x > 0$

d) $k(x) = \frac{x^2-7x+2}{x^3-1}$

e) $m(x) = xe^{x^2}$

f) $n(x) = \sqrt{e^{2x}}$

Oppgave 13 Deriver funksjonen

$$f(x) = |x|, \quad x \neq 0.$$

(Hint: Bruk grenseverdien (2.1), eventuelt se på grafen til f.)

Oppgave 14 Deriver funksjonene.

a) $f(x) = \ln|\cos x| + \sin(\frac{x}{2}) \quad (\cos x \neq 0)$

b) $f(x) = \frac{4x^3+5x}{\sin(x+2)} \quad (\sin(x+2) \neq 0)$

c) $f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$

e) $f(x) = e^{2x^2+x-1}$

Oppgave 15 Deriver funksjonene.

a) $f_1(x) = \sin x \cos x + x^2$

b) $f_2(x) = \cos(\sqrt{x}) - \sqrt{x}, \quad x \geq 0$

c) $f_3(x) = \frac{\sin(x^2)}{3x}, \quad x \neq 0$

Oppgave 16 Deriver funksjonene.

a) $f(x) = \pi^x$

b) $f(x) = e^{x \ln x}$

c) $f(x) = x^x$

Oppgave 17 Avgjør om de oppgitte funksjonene passer inn i de oppgitte difflikningene:

a) $y(x) = \cos x; \quad y'' + y = 0$

b) $y(x) = 20e^x; \quad y' - y = 20$

c) $y(x) = x \ln x - x + 1; \quad y' = \ln x$

d) $y(x) = x^3; \quad y' - 3xy^2 = 5$

e) $y(x) = 2e^{\cos x} + 1; \quad y' + (\sin x)y = \sin x$

f) $y(x) = x^2; \quad y' = \frac{x^2}{y^2}, \; y \neq 0$

g) $y(x) = 2xe^{2x}; \quad y'' - 4y' + 4y = 0$

Oppgave 18 Finn de ubestemte integralene.

a)
$$\int (x^5 - 3x)\, dx$$

b)
$$\int (x^{\frac{5}{6}} - 1)\, dx$$

c)

$$\int 3xe^{x^2}\,dx$$

d)

$$\int x^3 \sin(x^4)\,dx$$

e)

$$\int \frac{3}{x(x-2)}\,dx$$

f)

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$$

Oppgave 19 Finn de ubestemte integralene.

a)

$$\int e^x \sin x dx$$

b)

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

c)

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx$$

Oppgave 20 Finn de ubestemte integralene.

a)

$$\int 3\ln x\,dx$$

b)

$$\int \cos^2 x\,dx$$

c)

$$\int x\ln(x^2)\,dx$$

d)
$$\int x \sin(\sqrt{x})\, dx$$

(Hint i d): Substitusjon $\sqrt{x} = u$.)

e)
$$\int (x^2 + x) \sin x \, dx$$

A.3 Kapittel 3

Oppgave 21 Finn den generelle løsningen til difflikningen.

a) $y' + \frac{1}{x} y = \sin x, \quad x > 0$

b) $\frac{y'}{4x} + y = 2, \quad x \neq 0$

c) $2y' + y = e^x$

Oppgave 22 Finn alle løsningene til følgende difflikninger.

a) $y' + 2xy = x$

b) $y' + y = e^x$

c) $y' + 2y = xe^x$

d) $(x^2 + 1)y' + 3xy = 6x$

Oppgave 23 Finn alle løsningene til difflikningen

$$xy' + (2x - 3)y = 4x^4.$$

(Her må man drøfte absoluttverdi, og det er lurt å gjøre denne oppgaven etter at man har sett på Eksempel 3.9.)

Oppgave 24 Finn alle løsningene til følgende difflikninger.

a) $y' - 2x\sqrt{y} = 0 \quad (y > 0)$

b) $y' = \sqrt{xy} \quad (x, y > 0)$

c) $y' = 2x\sqrt{y-1} \quad (y > 1)$

Oppgave 25 Finn den generelle løsningen til difflikningen.

a)

$$y^2 y' = 5x$$

b)

$$\frac{1}{x} y' = \cos x, \quad x \neq 0$$

c)

$$e^y y' = e^{2x}$$

Oppgave 26 Finn den generelle løsningen til følgende difflikninger.

a)

$$y'' + 2y' - 5y = 0$$

b)

$$y'' - \frac{1}{2} y' - 2y = 0$$

c)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Oppgave 27 Finn alle løsningene til følgende difflikninger.

a) $2y'' - 7y' + 3y = 0$

b) $y'' + 4y' = 0$

c) $y'' - 10y' + 25y = 0$

d) $y'' - 4y' + 5y = 0$

Oppgave 28 Finn den generelle løsningen til difflikningen.

a) $y'' + 3y' + 4y = 0$

b) $3y'' + 6y' + 9y = 0$

c) $2y'' - 5y' - y = 0$

d) $y'' - 4y' - 5y = 0$

Oppgave 29 Løs initialverdiproblemene.

a) $y' - y = 4, \quad y(0) = 2$

b) $y' + xy = x, \quad y(0) = 0$

c) $y' + 2y = x^2, \quad y(1) = 2$

Oppgave 30 Anta at vi har en innsjø med oppdrettslaks. La $L(t)$ være antall laks i innsjøen ved tiden t, hvor t måles i uker. Anta videre at laksen blir utsatt for en sykdom ved tiden $t = 0$ slik at deretter blir

$$L'(t) = -k\sqrt{L(t)}, \quad k > 0.$$

Hvor lang tid tar det før all laksen i innsjøen er død hvis vi starter med 900 laks og har 441 igjen etter 6 uker?

Oppgave 31 Ei møllkule fordamper med en hastighet som er proporsjonal med overflaten til kula. Under fordampingen kan massen til møllkula beskrives ved difflikningen

$$M'(t) = -kM(t)^{\frac{2}{3}}$$

der $M(t)$ er massen til møllkula etter t døgn målt i gram, og $k > 0$. (Vi skal se litt nærmere på hvordan denne difflikningen dukker opp i Eksempel 4.3.)

a) Finn et uttrykk for $M(t)$ når du får vite at $M(0) = 1$.

b) Hvor lang tid tar det før hele møllkula er fordampet hvis $M(75) = 0.5$?

Oppgave 32 (UiO) Nitrogenpentoksid (N_2O_5) er et fast stoff som spalter seg i gassene nitrogendioksid (NO_2) og oksygen (O_2). Hvis $M(t)$ betegner mengden av N_2O_5 etter t sekunder, så er

$$M'(t) = -0.0005M(t).$$

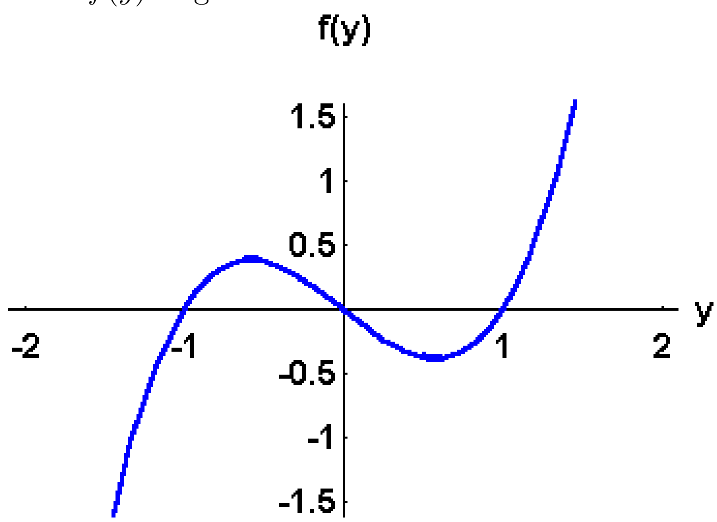
Hvor stor brøkdel av N_2O_5 er det igjen etter 1000 sekunder? Når er mengden av N_2O_5 redusert til 10 % av den opprinnelige?

Oppgave 33 Bevis Teorem 3.34. (Det vil ikke bli gitt fasit her, men spør gjerne hvis dere lurer.)

Oppgave 34 Se på difflikningen

$$y'(t) = f(y)$$

der grafen til $f(y)$ er gitt ved



a) Skisser retningsdiagrammet til denne likningen.

b) Skisser grafen til løsningen av problemet

$$y'(t) = f(y), \; y(0) = \frac{1}{2}.$$

Finn grensen $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

c) Skisser grafen til løsningen av problemet

$$y'(t) = f(y), \; y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Finn grensen $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

A.4 Kapittel 4

NB! Det er mange tidligere eksamensoppgaver i Tillegg B! Oppgavene gitt i denne seksjonen er også stort sett eksamensoppgaver, som kommer med fasit/løsningsforslag.

Oppgave 35 (UiO) I et land er den årlige befolkningsveksten 2 %. I tillegg har landet en netto innvandring på 40 000 personer per år. Sett opp en differensiallikning for funksjonen $y(t)$ som angir hvor mange personer det er i landet ved tiden t. Anta at befolkningen i landet er 2 000 000 ved tiden $t = 0$. Finn $y(t)$.

Oppgave 36 (UiO) 10 millioner tonn søppel blir ved tiden $t = 0$ deponert på en midlertidig lagringsplass. Søppelet inneholder 200 000 tonn av et skadelig stoff som brytes ned med en jevn fart av 5% per år.

a) La $y(t)$ være prosentdelen av skadelig stoff i søppelet etter t år. Forklar hvorfor

$$y'(t) = -0.05y(t), \qquad y(0) = 2$$

og vis at $y(t) = 2e^{-0.05t}$.

b) Søppelet blir overført til en permanent lagringsplass med en jevn fart av 1/2 million tonn per år. På den nye lagringsplassen blir søppelet behandlet slik at det skadelige stoffet brytes ned med en fart av 10% per år. La $z(t)$ være antall millioner skadelig stoff på den nye lagringsplassen etter t år. Forklar hvorfor

$$z'(t) = -0.1z(t) + 0.01e^{-0.05t}, \qquad z(0) = 0$$

c) Vis at $z(t) = \frac{1}{5}e^{-0.05t} - \frac{1}{5}e^{-0.1t}$.

Oppgave 37 (UiO) Et svømmebasseng er fylt med 1 000 000 liter badevann som inneholder 0.004 % klor (eller rettere sagt et klorderivat). Eieren synes klorprosenten er for høy og begynner derfor å tappe ut 50 000 liter per dag samtidig som bassenget fylles opp med 50 000 liter per dag nytt badevann som kun inneholder 0.001 % klor. Vi antar her at blandingen vann/klor hele tiden er perfekt.

La $y(t)$ betegne antall liter klor som finnes i badevannet ved tiden t (målt i dager), der vi setter $t = 0$ når prosessen begynner. Forklar hvorfor y tilfredsstiller differensiallikningen

$$y' + \frac{1}{20}y = \frac{1}{2},$$

og regn ut hvor lang tid det tar før klorprosenten er nede i 0.003 %.

Oppgave 38 (UiO) En melkekartong der temperaturen i melken var 6°C ble stående på kjøkkenbenken i to timer. Da var temperaturen i melken steget til 13°C. Lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C. Vi regner med at temperaturen i melken endres med en hastighet som er proporsjonal med differansen mellom lufttemperaturen og temperaturen i melken.

a) Still opp en difflikning for temperaturen T i melken som funksjon av tiden t og vis at den har en løsning på formen

$$T(t) = A + Be^{-\alpha t},$$

der A er lufttemperaturen utenfor kartongen. Finn B og α.

b) Hva blir temperaturen i melken hvis kartongen blir stående på kjøkkenbenken i enda én time?

c) Da temperaturen i melken var 15°C ble kartongen satt inn i kjøleskapet. Etter én time var temperaturen i melken sunket til 12°C. Hva var temperaturen i kjøleskapet? (Selv om vi ikke tjener så mye på matematikken akkurat her, ser vi at ved hjelp av en modell, i dette tilfellet Newtons avkjølingslov, kan vi altså regne ut temperaturen før vi eventuelt går og måler i kjøleskapet!)

Oppgave 39 I for eksempel Oppgave 38, kunne vi bruke matematikken til å si noe om fremtiden (hva skjer hvis melken blir stående?). Noen ganger ønsker man gjerne å finne ut noe om *fortiden*, og spesielt hvis man ikke har vært tilstede:

Estimering av dødstidspunkt:

Newtons avkjølingslov gir en *matematisk modell* av temperaturen $T(t)$ til et objekt i omgivelser med temperatur $A(t)$:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A(t)) \tag{A.1}$$

der $k > 0$ måler hvor fort varme absorberes (evnt. avgis) av objektet ('varme-absorberings(evnt. avgivelses)raten').

Metoden som brukes for å estimere et dødstidspunkt er å måle temperaturen til den døde kroppen på to ulike tidspunkt for å estimere konstanten k som skal brukes i Newtons avkjølingslov (A.1), og deretter ekstrapolere (beregne ukjent størrelse ut fra størrelser vi kjenner) tilbake for å finne tiden t_0 da temperaturen $T(t_0)$ i kroppen var 37°C (en levende kropp).

Anta at en død kropp blir funnet i et rom med konstant temperatur A=24°C (for enkelhets skyld). Da kroppen ble funnet kl. 08:00 om morgenen var temperaturen i kroppen 28°C, mens den hadde sunket til 26°C en time senere. Bestem dødstidspunktet.

Oppgave 40 (EKSTRA vanskelig!) **Mens vi venter på vinteren:**

Tre brøytebiler deler brøyteansvar for samme vei. Veien er lang, og de tre brøytebilene starter på samme sted og brøyter i samme retning.

Anta at farten til en brøytebil er omvendt proporsjonal med mengden snø som er foran bilen. (Dvs. at bilen kjører uendelig fort hvis snødybden er 0, men så lenge snødybden er >0, passer denne antagelsen fint.) Denne antagelsen gjør oss istand til å løse følgende problem:

En gang før kl. 12 på dagen begynner det å snø. Kl. 12 starter første brøytebil (kalt '1') brøytingen. Det fortsetter å snø (med samme intensitet), og én time senere starter den andre brøytebilen (kalt '2'). Kl. 14 starter den tredje brøytebilen (kalt '3'). Etter en stund (ca. en time) tar 3 igjen 2, og samtidig tar 2 igjen 1.

Når begynte det å snø?

Oppgave 41 En bil med hull i tanken kjører med jevn fart fra Oslo retning Lillehammer. Antall liter bensin som per mil lekker ut av tanken er til enhver tid proporsjonal med bensinvolumet (målt i liter) på tanken. Proporsjonalitetskonstanten er 0,1 $(\text{mil})^{-1}$. Motorens bensinforbruk regnes konstant og lik 0,7 liter per mil.

a) La $V(x)$ være bensinvolumet i tanken når bilen har kjørt x mil. Still opp en difflikning som $V(x)$ tilfredstiller og løs likningen.

b) Hvor langt kan bilen kjøre hvis det er 20 liter bensin på tanken ved start?

c) Fra Oslo til Lillehammer er det 18,5 mil. Hva er det minste antall liter bensin vi må ha på tanken ved start for å komme helt frem til Lillehammer?

Oppgave 42 Eksempel 4.1 fortsetter. Hva skjer med studentens kunnskap i kurset etter eksamen? Vi introduserer en glemselsmodell der vi antar at mengden kunnskap studenten glemmer per tidsenhet er proporsjonal med mengden kunnskap studenten har i kurset.
Merk: Den nye modellen, og dermed også likningen og løsningene gjelder nå for $t \geq 4$ (etter eksamen, som var 4 måneder etter oppstart).

a) Sett opp en difflikning som beskriver endringen av studenten kunnskap $K(t)$ per tidsenhet etter eksamen.

b) Du får vite at studenten behersker halvparten av pensum i kurset 2 år etter eksamen. Løs likningen i a).

Oppgave 43 Et våpen på en 'USM60 tank' er satt inn i et fjærsystem med fjærkonstant $100\alpha^2$ og dempingskonstant (friksjonskonstant) 200α. Våpenet veier $100\,kg$.

La $y(t)$ være avstanden fra likevekt ved tiden t sekunder etter avfyring. Vi har $y(0) = 0$ og antar $y'(0) = 100\,m/s$. Vis at y oppfyller problemet

$$100y'' + 200\alpha y' + 100\alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 100.$$

Ekstra vanskelig: Man ønsker at 1 sekund etter avfyring skal

$$y^2 + (y')^2 < 0.01.$$

(Betingelse om hvor fort man kan fyre av igjen.) Hva må α være? (Løses best grafisk på kalkulator.)

Oppgave 44 (UiO) To dyrearter lever i et naturlig samspill. Vi lar $N_1(t)$ og $N_2(t)$ være antall individer av hver art ved tiden t. Sett

$$\begin{aligned} x(t) &= N_1(t) - 300 \\ y(t) &= N_2(t) - 10\,000. \end{aligned}$$

For å modellere samspillet mellom de to artene, har forskerne satt opp differensiallikningene

$$x'(t) = by(t) \qquad \text{og} \qquad y'(t) = -cx(t)$$

der b og c er positive konstanter.

a) Den ene arten er rovdyr og den andre byttedyr. Hvilken er rovdyr?

b) Vis at $x''(t) = -bcx(t)$.

c) Anta at $x(0) = x_0$ og $y(0) = y_0$. Finn $x(t)$ og $y(t)$.

d) Observasjoner tyder på at de beste verdiene er $b = 0.05$, $c = 84$. Anta at $N_1(0) = 300$ og $N_2(0) = 1400$, og skisser grafene til $N_1(t)$ og $N_2(t)$. Kan du gi en intuitiv forklaring på hvorfor bunner og topper er forskjøvet i forhold til hverandre?

Tillegg B

Tidligere eksamensoppgaver

Her følger et utvalg av tidligere eksamensoppgaver innenfor temaet differensiallikninger gitt ved UiO og NTNU (Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet). Oppgavene fra NTNU er hentet med tillatelse, og utvalget er gjort med hensyn på at de skal kunne løses med pensumet i MAT1001. Vær oppmerksom på at språk og notasjon kan variere noe.

Vi har dermed delt dette kapitlet i to seksjoner, 'Fra NTNU' og 'Fra UiO' der oppgavene er ordnet kronologisk. Vi starter med NTNU:

B.1 Fra NTNU

Eksamen i MA 001 Brukerkurs i matematikk, 6. januar 1993

Oppgave 1

Den radioaktive isotopen thorium-234 brytes ned (desintegrerer) i samsvar med differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{dy}{dt} = -ay$$

der a er en positiv konstant og $y = y(t)$ er mengden av thorium-234 ved tiden t.

a) Løs differensialligningen $(*)$ og finn halveringstiden for thorium-234 (i dager) når det oppgis at 100 mg av stoffet etter 7 dager er redusert til 82,04 mg.

b) I en beholder med 100 mg thorium-234 ved tiden $t = 0$ tilføres det 1 mg isotopen pr. dag. La $y(t)$ være mengden thorium-234 i beholderen ved tiden t. Beregn $y(t)$ og finn grenseverdien $y(t)$ går mot når $t \to \infty$.

Oppgave 6

I en modell for ryktespredning i et samfunn på B individer går man ut fra at antallet $x = x(t)$ av individer som kjenner et bestemt rykte ved tiden t tilfredsstiller differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{dx}{dt} = ax(B - x)$$

der a er en positiv konstant.

a) La N_0 være antall individer som kjenner ryktet ved tiden $t = 0$. Finn løsningen av $(*)$ uttrykt ved a, B, N_0 og t.

b) Et rykte om at et større flyselskap sto på konkursens rand begynte å spre seg blant en gruppe aksjemeglere. Ved tiden $t = 0$ kjente 10% av alle meglerne ryktet, og 2 timer senere var det 25% som kjente det. Hvor lang tid gikk det før 75% av aksjemeglerne kjente ryktet når vi antar at ryktet spredde seg i samsvar med $(*)$?

Eksamen i MA 001 Brukerkurs i matematikk, 5. januar 1996

Oppgave 6
Spredning av sykdom

Til en befolkning hvor alle er like mottakelige for smitte, kommer det en smittet person. Via kontakt mellom individer i befolkningen vil smitten spre seg. I begynnelsen vil antall smittede personer øke langsomt, så vil prosessen aksellerere, dess flere syke dess flere blir smittet. Til slutt vil smittespredningen avta idet mesteparten av befolkningen er smittet. Vi vil anta at en person som er blitt syk vil forbli syk i det tidsintervallet vi studerer, og at befolkningen er konstant.

La $x = x(t)$ være antall friske" personer, $y = y(t)$ antal smittede i befolkningen ved et tidspunkt t (i dager etter ankomst av smittet person). La N være totalt antall individer i befolkningen. Siden befolkningen økte med en (smittet) person gjelder ved ethvert tidspunkt at

$$(*) \qquad x + y = N + 1, \quad \text{altså } x = N + 1 - y$$

Vi antar at antall smittede personer y tilfredsstiller differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = \beta xy$, der $\beta > 0$ er en konstant, kalt den spesifikke smitteraten.

a) Løs differensiallikningen $\frac{dy}{dt} = \beta xy$. (Hint: bruk $(*)$.)

b) Anta $N = 100000$ og at $\beta = 0,0000013$. Hvor lang tid tar det før 90% av befolkningen er smittet?

Eksamen i MA 001 Brukerkurs i matematikk, 21. mai 1996

Oppgave 3

I en kommune har en funnet at den relative (spesifikke) fødselsrate for elg er 0.14 (pr. år), mens den relative (spesifikke) dødsraten er 0.09 (pr. år). La $N(t)$ være antall elg ved tidspunktet t (t måles i år).

a) Anta at det drives elgjakt og at den relative (spesifikke) jaktraten er k (pr. år). Still opp en differensiallikningsmodell for $N(t)$ ut fra de gitte opplysningene. Hvis det er 2000 elg på et gitt tidspunkt, hvor stor må k være for at det skal være 2500 elg 20 år senere?

b) Anta nå at den relative (spesifikke) jaktraten er proporsjonal med antall elg, dvs. lik $cN(t)$ der c er en positiv konstant. Still opp en differensiallikningsmodell for $N(t)$ i dette tilfellet. Bestem c slik at antall elg med tiden stabiliserer seg på 2500.

Eksamen i MA 001 Brukerkurs i matematikk, 8. januar 1999

Oppgave 5

I hele oppgaven holder vi på med det samme bestemte radioaktive stoffet.

a) Et radioaktivt stoff har halveringstid T. Finn et uttrykk for mengden av radioaktivt stoff x som funksjon av tiden t, uttrykt ved hjelp av $x(0)$ og T.

b) Vi tenker oss at vi gjenåpner et gammelt lagringssted for radioaktivt avfall. Mengden av det bestemte radioaktive stoffet på lagningsstedet er k_0 ved gjenåpningstidspunktet. Vi bestemmer oss for å ta imot mengde k av det radioaktive stoffet pr. tidsenhet. Vi ønsker å sette opp en differensialligning som beskriver denne situasjonen.

   Forklar at vi får følgende differensialligning

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + k$$

   der $x(0) = k_0$ og $\lambda = \frac{1}{T} \ln 2$.

c) Hvor mye radioaktivt stoff kan vi lagre pr. tidsenhet hvis vi ønsker at mengden av radioaktivt stoff på lagringsplassen ikke skal øke?

d) Finn et uttrykk for mengden av radioaktivt stoff som funksjon av tiden t, uttrykt ved T, k_0 og k.

Eksamen i MA 001 Brukerkurs i matematikk, 19. mai 1999

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'(t) = a\,y(t) + b$$

der $y(0) = C_0$, uttrykt ved hjelp av konstantene a, b og C_0.

b) Vi har et kar på 20 *liter* som er fylt med en væske hvor det er blandet inn 10 mg av salt. Vi har så en løsning som inneholder 2 mg/l salt. Denne løsningen tilføres nå karet med 3 l/min. Overskytende væske renner ut av karet slik at volumet i karet er konstant hele tiden. Vi antar også at ved å røre om så vil konsentrasjonen av salt til enhver tid være konstant i hele karet.

   La $x(t)$ være mengde salt (i mg) i karet ved tiden t og sett opp en differensialligning som beskriver det som skjer i karet i stituasjonen over.

c) Hvor mange liter væske må vi tilføre for at karet skal inneholde 15 mg salt?

Eksamen i MA 001 Brukerkurs i matematikk, 21. mai 2002

Oppgave 3

En dyrepopulasjon antas å følge differensiallikningen

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a(B - N); \qquad a, B > 0$$

hvor N er antall individer i populasjonen, og tiden t måles i år.

a) Anta at populasjonen har relativ vekstrate på 10 per år, og at populasjonen består av 1100 individer på et gitt tidspunkt. Hva er da veksraten til populasjonen på det gitte tidspunktet?

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen, gjør rede for eventuelle konstante løsninger, og skisser de typiske integralkurvene for løsningene.

c) Du får oppgitt at populasjonen ved $t = 0$ er 1000, og at bærekapasiteten til populasjonen er 2000. Etter ti år blir det estimert at populasjonen har 1500 individer (ved $t = 10$). Regn ut a.

Eksamen i MA6101 Grunnkurs i analyse I, 6. juni 2006

Oppgave 3

Finn den løsningen av differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = 0$$

som tilfredsstiller $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$.

Eksamen i MA6101 Grunnkurs i analyse I, 13. desember 2006

Oppgave 4

Finn funksjonen som tilfredsstiller differensialligningen og begynnelsesbetingelsene

$$y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$$

Eksamen i MA1101 – Grunnkurs i analyse I, 6. juni 2007

Oppgave 4

$T = T(x)$ er en funksjon som gir frysepunktet T i °-Fahrenheit for saltvann som funksjon av saltkonsentrasjonen x i vannet. Teoretiske betraktninger gir følgende sammenheng:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T^2}{2+x}$$

Bestem funksjonen $T = T(x)$ når det opplyses at $T(0) = 32$.

Eksamensoppgaver for TMA4110/TMA4115 Matematikk 3

Oppgave A-4

b) Finn en løsning y av differensialligningen

$$xy' + 3y = 3x^{-3/2} \quad (x > 0)$$

slik at $y(1) = 3$.

Oppgave A-7

a) Løs differensialligningen

$$xy' + 2y = \cos x, \quad x > 0.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

Oppgave A-19

a) Løs initialverdiproblemet

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Eksamen i SIF5009/5010 Matematikk 3, 14. august 2000

Oppgave 1

Finn en løsning av differensialligningen

$$xy' - 3y = x^3$$

slik at $y(1) = 0$.

Eksamen i SIF5009 Matematikk 3, 22. desember 2000

Oppgave 2

Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad xy' + 2y = 4x^2, \qquad y(1) = 2.$$

a) Finn løsningen $y = y(x)$ av $(*)$ for $x > 0$.

Eksamen i SIF5009/5010 Matematikk 3, 10. august 2001

Oppgave 2

Gitt initialverdiproblemet

$$(*) \qquad y' - 2xy = x, \qquad y(1) = 0.$$

a) Finn løsningen $y = y(x)$ av $(*)$.

Eksamen i SIF5009 Matematikk 3, 2. desember 2002

Oppgave 2

Løs initialverdiproblemene

a) $xy' + 4y = 8x^4$ $(x > 0)$, $y(1) = 2$

b) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

B.2 Fra UiO

Eksamen i MA 001, 3. desember 1979

Oppgave 4

Peranema trichophorum er en art encellede alger som beveger seg ved hjelp av to flageller. En av dem peker forover i bevegelsesretningen og vi skal konsentrere oss om lengden av denne forreste flagellen. Vi skal stille opp en modell for veksten. Vi lar tiden $t = 0$ være tidspunktet da algen ble skilt fra modercellen. Flagellens lengde var da 47μm. Ferdig utvokst er flagellens lengde $L^* = 63\mu$m. La L være flagellens lengde ved tiden t. Vi antar at vekstraten til L er proporsjonal med differensen $L^* - L$. Målinger i laboratoriet har vist at proporsjonalitetskonstanten kan settes lik 0,087 pr time.

a) Still opp en differensiallikning som L må tilfredsstille.

b) Finn en formel for L som funksjon av tiden.

Eksamen i MA 001, 3. desember 1980

Oppgave 2

Vi tenker oss et jordlag som ved tiden t (timer) har et visst vanninnhold $v = v(t)$. v måles i mm. Vi antar at vannet beveger seg ned gjennom jorda og forlater jordlaget med en avrenningshastighet (målt i mm pr. time) som er proporsjonal med vanninnholdet i jordlaget. Videre antar vi at jordlaget tilføres regn med konstant intensitet $p = 2$ (mm pr. time). På grunnlag av dette kan vi stille opp følgende differensiallikningsmodell

$$\frac{dv}{dt} = p - kv$$

der $k = 0,2$ (pr. time). Anta at vanninnholdet i jordlaget ved tiden $t = 0$ er 1,8 mm.

a) Finn jordlagets vanninnhold ved tiden $t = 3$ (timer).

b) Vanninnholdet vil i det lange løp stabilisere seg på en viss verdi. Finn denne verdien.

Eksamen i MA 001, 29. mai 1981

Oppgave 3

En modell for folketallet, p, i New York gir differensialligningen

$$\frac{dp}{dt} = 0.56p - 4.0 \cdot 10^{-8}p^2 - 16 \cdot 10^5 \quad \text{der } t \text{ måles i år.}$$

1/1–1960 var folketallet $6.0 \cdot 10^6$.

a) Finn ut fra denne modellen, folketallet i New York som funksjon av antall år etter 1/1–1960.

b) Hva vil befolkningen stabilisere seg på etter lang tid?

c) Når er vekstraten for folketallet størst? (Hint: Bruk differensiallignin-gen.)

Eksamen i MA 001, 11. juni 1982

Oppgave 4

Etter innsprøyting av et medikament i blodet vil konsentrasjonen ofte avta eksponensielt med tiden. Vi kan derfor snakke om halveringstid for et medikament, dvs. den tid det tar for konsentrasjonen å bli halvert.

Et medikament A har en halveringstid på 1,7 timer. En behandling av en pasient starter med at det er 10μg A per liter blod. La $C(t)$ være konsentrasjon av A mål i μg per liter og mål t i timer.

a) Finn et uttrykk for $C(t)$ på grunnlag av opplysningene i teksten.

b) En enkel differensialligningsmodell kan beskrive en utvikling av konsentrasjonen som beskrevet ovenfor. Still opp modellen og bestem eventuelle konstanter som inngår.

En behandling av en pasient med A viser seg å være mislykket fordi konsentrasjonen blir fort for lav, og fordi det er ønskelig å holde konsentrasjonen konstant over lengre tid.

En ny behandling av en pasient med A starter med at det er 0 μg A per liter blod. Pasienten får A intravenøst slik at det svarer til en øyeblikkelig økning i konsentrasjonen på 6μg A per liter blod per time.

a) Vi kan stille opp differensialligningen $\frac{dc}{dt} = ac + b$ der t måles i timer. Bestem a og b.

d) Konsentrasjonen vil i det lange løp stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne verdien.

e) Finn hvor lang tid det tar før konsentrasjonen er 96% av grenseverdien.

Eksamen i MA 001, 13. mai 1983

Oppgave 3

En fiskebestand er fredet og antas å følge den logistiske vekstmodell

$$\frac{dN}{dt} = rN(K - N)$$

hvor $N(t)$ er bestandens størrelse ved tiden t og hvor r og K er positive konstanter. Fredningen oppheves og ved avtale blir det vedtatt at det skal fiskes en mengde F pr. tidsenhet. Vi velger å skrive

$$F = rs\frac{K^2}{4}$$

hvor s er en konstant som oppfyller $0 < s < 1$.

a) Vis at funksjonen N nå vil oppfylle differensiallikningen

$$\frac{dN}{dt} = r(K_1 - N)(N - K_2)$$

hvor K_1 og K_2 er gitt ved

$$K_1 = \tfrac{K}{2}(1 + \sqrt{1 - s}\,), \quad K_2 = \tfrac{K}{2}(1 - \sqrt{1 - s}\,).$$

b) Finn den løsningen av ovenstående likning som oppfyller initialbetingelsene $N(0) = N_0$.

c) Anta at $N_0 < K_2$. Vis at N er avtagende og avgjør når vi får "svart hav", det vil si når $N(t) = 0$.

Eksamen i MA 001, 26. november 1983

Oppgave 3

Mengden M (kg) av en type fjellmose øker med raten $\frac{M}{12}$ (kg pr. tidsenhet) 1. april. Den *avtar* med samme rate 1. oktober. Som en matematisk modell for mosens utvikling bruker vi differensialikningen

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M}{12} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

der $M(t)$ er mosemengden ved tiden t (måneder), og vi setter $t = 0$ 1. januar.

På en åsside er det 600 kg av denne fjellmosen 1. januar. Når er mengden av fjellmose størst? Hvor mye fjellmose er det 1. oktober?

Eksamen i MA 001, 27. mai 1991

Oppgave 4

Vi skal i denne oppgaven stille opp en differensiallikning for å beskrive veksten av en sjøstjernearm. Vi lar $y(t)$ være lengden av armen (målt i cm) ved tiden t (målt i uker). Armens relative vekstrate antas å være omvendt proporsjonal med en potens av armens lengde, dvs. vi har differensiallikningen

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{a}{y^k}$$

hvor a og k er positive konstanter. Anta at armen er 1 cm lang ved $t = 0$.

a) Løs differensiallikningen over med den gitte initialbetingelsen.

b) Ved $t = 0$ måler vi armens relative vekstrate lik 1 (uke^{-1}). Etter 4 uker har armen vokst til 3 cm, mens relativ vekstrate har sunket til $\frac{1}{9}$ (uke^{-1}). Bruk dette til å bestemme konstantene a og k i differensiallikningen, og finn lengden y som funksjon av tiden t.

Eksamen i MA 001, 2. juni 1993

Oppgave 4

Et vann er tynt befolket av et visst fiskeslag. La $x(t)$ være populasjonens størrelse (i antall) ved tiden t. Anta at sjansen for at en gitt fisk skal møte en vilkårlig annen fisk i et lite tidsintervall er proporsjonal med populasjonens størrelse.

a) Anta at fødselsraten er proporsjonal med antall tilfeldige møter av to fisk og at dødsraten er proporsjonal med antall fisk, og vis at dette leder til differensialligningen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax$$

der a, b er positive konstanter. Forklar spesielt fortolkningen av termene bx^2 og ax.

b) Anta at den opprinnelige populasjonsstørrelsen er $x(0) = x_0$, og finn $x(t)$.

c) Vis at det finnes en konstant k_0 slik at hvis $x_0 < k_0$, så vil populasjonen etterhvert dø ut, mens hvis $x_0 > k_0$, så vil populasjonen vokse over alle grenser på en endelig tid. Finn k_0 og denne endelige tiden.

Anta nå at fisken høstes med en konstant rate $c > 0$ fra tiden $t = 0$, slik at ligningen

$$\frac{dx}{dt} = bx^2 - ax - c$$

gjelder. Anta igjen at den opprinnelige populasjonsstørrelsen er $x(0) = x_0$, og anta at $x_0 > k_0$.

d) Finn en verdi c_0 av c slik at fiskepopulasjonen holder seg konstant lik x_0 hvis fisken høstes med den konstante raten c_0.

Eksamen i MA 001, 3. desember 1993

Oppgave 3

Ved telling av hval i et havområde finner man at den relative (spesifikke) fødselsraten for hvalene er 0,14 (pr. år), mens den relative (spesifikke) dødsraten er 0,09 (pr. år).

a) Anta at det drives hvalfangst i området og at den relative (spesifikke) fangstraten er k (pr. år).

   La $N(t)$ være antall hval på tidspunktet t (t måles i år), og still opp en differensialligningsmodell for $N(t)$ basert på opplysningene over.

   Hvis det er 40000 hval på et gitt tidspunkt, hvor stor må k være for at det skal være 50000 hval 20 år seinere?

b) Anta nå at den relative (spesifikke) fangstraten er proporsjonal med antall hval, dvs. lik $cN(t)$, der c er en positiv konstant. Still opp en differensialligningsmodell for $N(t)$ i dette tilfellet.

   Hva må c være for at antall hval med tida skal stabilisere seg på 50000?

Eksamen i MA 001, 31. mai 1994

Oppgave 4

Den 20. juli 1990 lekket det ut en ukjent mengde giftig, men nedbrytbart stoff i en myr. Nøyaktig tre år senere foretok man en undersøkelse som viste at det fortsatt befant seg $5,0 \cdot 10^2$ kg gift i myren.

For å anslå hvor mye gift som lekket ut i 1990 vil vi stille opp en modell for nedbrytningsforløpet. La $y(t)$ være giftmengden (målt i kg) som befinner seg i myren ved tiden t (t måles i år). Vi antar at $t = 0$ er 20. juli 1993, altså tre år etter utslippet. Nedbrytningen avhenger av temperatur, dagslys og biologisk aktivitet. I modellen antar vi at den relative nedbrytningshastigheten, $-\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$, varierer med årstiden som en harmonisk svingning med middelverdi og amplitude begge lik 0,4 pr. år, periode 1 år og akrofase 0 år.

a) Still opp differensialligningen disse antagelsene leder til.

b) Finn funksjonen $y(t)$.
Hvor mye gift lekket det ut den 20. juli 1990 ifølge modellen?

Eksamen i MA 001, 3. desember 1994

Oppgave 3

Vi tenker oss en ideell vekstmodell for penger på en bankkonto, nemlig at beløpet på kontoen øker med en vekstrate som til enhver tid er proporsjonal med beløpet, d.v.s.

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

der N er kronebeløpet ved tiden t (år), og k er en positiv konstant.

a) La r være den effektive årlige renten målt i %, d.v.s. at beløpet ved slutten av året har økt med faktoren $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ i forhold til hva det var i begynnelsen av året. Uttrykk r ved hjelp av k. Hva må k være for at r skal være mindre enn 100?

b) En bank tilbyr en årlig 'nominell' rente på 2%. Renten blir beregnet og lagt til kapitalen hver måned. Derfor, hvis vi starter med et beløp N_0 på en konto, vil kapitalen bli $\left(1 + \frac{0,02}{12}\right)N_0$ etter en måned, $\left(1+\frac{0,02}{12}\right)^2 N_0$ etter to måneder, o.s.v. Etter ett år har beløpet vokst til $A = \left(1+\frac{0,02}{12}\right)^{12} N_0$. Bruk kalkulatoren til å regne ut differansen mellom A og beløpet man ville hatt etter ett år i følge den ideelle modellen med $k = 0,02$ og $N_0 = 100000$ kroner.

c) Finn

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n .$$

(Hint: Sett $m = \frac{n}{r}$.)

Eksamen i MA 001, 30. mai 1995

Oppgave 6

Den 1. juni 1995 blir det sluppet ut en større mengde dødelige soppsporer ved Midtodden i Maridalsvannet. Soppsporene sprer seg jevnt utover i hele vannet, dvs. slik at konsentrasjonen av sporer er den samme i hele vannet. Den eneste måten å bli kvitt sporene på er å vente til de blir skylt ut i Oslofjorden via Akerselva (du gamle du grå ...)

Vi antar at sporene holder seg jevnt fordelt i vannet og at vannvolumet V i Maridalsvannet er konstant. Vannføringen i Akerselva antar vi varierer med årstidene som en harmonisk svingning med periode 1 år og at vannføringen er størst 1. juni. Middelverdi og amplitude for vannføringen har vi ikke greid å få fra vannverket ennå, så vi kaller dem henholdsvis M og a.

a) Still opp en differensialligning for sporemengden $y(t)$ hvor t måles i år og $t = 0$ er 1. juni 1995.

b) Løs differensialligningen du stilte opp i forrige punkt.

c) Vis at $y(1)/y(0) = e^{-M/V}$.

Eksamen i MA 001, 29. november 1996

Oppgave 4

La $y(t)$ være antall fisk i en gitt fiskebestand ved tid t, der t måles i år. Pga. ustabilitet i økosystemet opplever bestanden for tiden økende svingninger i næringsgrunnlaget sitt, og vi antar derfor at den relative vekstraten til y er proporsjonal med uttrykket $t\cos(t^2)$. Proporsjonalitetskonstanten antar vi for enkelhets skyld er 1.

a) Still opp en differensiallikning for $y(t)$.

b) Finn $y(t)$, når du antar at $y(0) = 10^6$.

Eksamen i MA 001, 28. november 1997

Oppgave 5

Det religiøse shaker-samfunnet i Pleasant Hill, Kentucky, kjent for sin flotte arkitektur og oppfinnelsen av den flate sopelimen, levde i sølibat og hadde derfor ingen fødselsrate. De hadde likevel et jevnt tilsig av 10 nye medlemmer pr. år, hovedsakelig p.g.a. fattige som overlot sine barn til dem. La $N(t)$ betegne antall individer i sekten, der t måles i år.

a) Hvis vi regner med en relativ dødsrate på 2% pr. år, finn en differensialligning for $N(t)$ på formen:

$$\frac{dN}{dt} = aN + b$$

Hvis det var 120 shakere i år 1800, vis at antallet i 1850 var steget til 360. (Sett gjerne $t = 0$ i år 1800.)

b) Beregn $\lim_{t\to\infty} N(t)$ og forklar hvordan vi kan finne svaret uten å beregne $N(t)$.

Etter 1850 forandret de sosiale forholdene seg, og ingen overlot sine barn til shakerne mer. De måtte derfor begynne å verve nye medlemmer, hvilket førte til en gradvis forandring i aldersfordelingen. Vi deler derfor befolkningen i to deler, "de unge" og "de gamle". Anta at det i 1850 var like mange unge som gamle og la x_n og y_n betegne antall unge og gamle $10n$ år etterpå.

Vi antar at av de som var unge ved begynnelsen av en tiårsperiode er 70% fortsatt unge, 20% er blitt gamle, 10% er døde og 10% har greid å verve ett nytt ungt medlem i løpet av tiårsperioden. Ingen av de unge har greid å verve gamle medlemmer.

Av de som var gamle ved begynnelsen av tiårsperioden er 60% fortsatt i live, 5% har greid å verve et nytt ungt medlem og 20% har greid å verve ett nytt gammelt medlem.

c) Vis at $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ der $M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$.

Beregn M^2 og finn hvor mange unge og gamle det var i 1870. (Rund av til nærmeste hele tall.)

d) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

e) Finn x_n og y_n og forklar hvorfor sekten etterhvert døde ut. Beregn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

Eksamen i MA 001, 2. juni 1998

Oppgave 4

Anta at lysintensiteten I i et vann som funksjon av dybden x tilfredsstiller differensiallikningen

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I \ ,$$

der absorpsjonskoeffisienten μ varierer med dybden etter formelen $\mu = \mu(x) = 1.4 + 0.02x$ (m^{-1}).

Finn lysintensiteten ved dybden x når den ved overflaten er I_0. Ved hvilket dyp er lysintensiteten halvparten av I_0?

Eksamen i MA 001,14. desember 1998

Oppgave 3

Vi tenker oss en oljetank som inneholder 5000 liter olje. Ved tiden $t = 0$ begynner det å lekke olje ut av tanken. La $V = V(t)$ være antall liter som er igjen i beholderen t timer etter at lekkasjen begynte. Fordi det ikke kommer ny olje inn i tanken, vil utstrømningshastigheten være lik $-\frac{dV}{dt}$. I det følgende skal vi se på to forskjellige modeller.

a) **Modell 1:** Vi antar at utstrømningshastigheten er proporsjonal med antall liter som er igjen i tanken. Videre antar vi at proporsjonalitetskonstanten er $k = 0.033$ (per time). Still opp differensiallikningen som V må følge, og finn V som funksjon av t. Finn ut hvor lang tid det tar før halvparten av oljen har lekket ut.

b) Vi tenker oss nå at lekkasjen skyldes et hull som til å begynne med er ganske lite, men som øker etter hvert. For å ta hensyn til dette, ser vi på en ny modell.

Modell 2: I denne modellen antar vi at V følger differensiallikningen

$$\frac{dV}{dt} = -atV$$

der $a = 0.0024$ (per (time)^2). Finn V som funksjon av t, og finn ut hvor lang tid det tar før halvparten av oljen har lekket ut ifølge denne modellen.

Eksamen i MA 001, 3. juni 1999

Oppgave 4

a) Løs differensiallikningen $dy/dt = y^2 - 4$ med initialbetingelse $y(0) = -1$.

b) Finn det ubestemte integralet $\int (y-2)^{-2} dy$.

c) En størrelse s som endrer seg med tiden t har en vekstrate som er proporsjonal med $(s-2)^2$. Kall proporsjonalitetskonstanten k. Still opp en differensiallikning for s, og finn løsningen med initialbetingelse $s(0) = 1$.

Eksamen i MA 001, 13. desember 1999

Oppgave 1

c) Finn en løsning av differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = e^{-y}t$$

som oppfyller $y(0) = 0$.

Oppgave 2

En bakteriekultur vokser med en hastighet som til enhver tid er proporsjonal med antall bakterier. Proporsjonalitetskonstanten er $a = 2.31 \cdot 10^{-2}$ minutt^{-1}. La $y(t)$ være antall bakterier ved tiden t.

Still opp en differensiallikning $y(t)$ må oppfylle, og finn hvor lang tid det tar før antall bakterier er fordoblet.

Oppgave 4

Et basseng har et volum på 10^3m^3. Ved tiden $t = 0$ er bassenget tomt. Vi fyller så vann i bassenget med en konstant hastighet $v = 2.4$ m^3 minutt^{-1}. Samtidig lekker det vann ut av bassenget med en hastighet som til enhver tid er proporsjonal med vannvolumet. Proporsjonalitetskonstanten er $a = 3 \cdot 10^{-3}$ minutt^{-1}. La $V(t)$ være vannvolumet i bassenget t minutter etter vi begynte å fylle vann i bassenget.

a) Forklar hvorfor $V(t)$ må oppfylle differensiallikningen

$$\frac{dV}{dt} = v - aV$$

og finn $V(t)$.

b) Finn når bassenget er halvfullt.
Ettersom tiden går vil vannvolumet i bassenget stabilisere seg på en viss verdi. Finn denne verdien.

Eksamen i MA 001, 5. juni 2000

Oppgave 3

Vi skal studere en modell for hvordan en bakterieart formerer seg. Anta at bakterien lever i jordsmonnet, og sett N = antall bakterier pr. m^3. Vi tenker oss at den relative vekstraten til bakteriepopulasjonen er proporsjonal med temperaturen minus den årlige middeltemperaturen. La t være antall måneder siden 1. januar og la $T(t)$ betegne temperaturen og T_m middeltemperaturen.

a) Forklar hvorfor bakterietettheten vil kunne modelleres ved

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k\left(T(t) - T_m\right),$$

der k er en konstant.

Vi tenker oss nå at $T(t)$ er en harmonisk svinging med amplityde 10, periode 12 måneder, middeltemperatur T_m, og maksimum for $t = 6$.

b) Når vil $N(t)$ være størst og minst for t i intervallet $[0, 12]$? (Du trenger ikke å løse differensialligningen for å svare på dette.)

c) Anta at $k = 5$ og at bakterietettheten 1. januar er 300 bakterier pr. m^3. Finn $N(t)$.

Eksamen i MA 001, 10. desember 2001

Oppgave 5

Gitt differensiallikningen

$$y' = 2y + y^2 .$$

a) Finn de konstante løsningene og den generelle løsningen.

b) Finn løsningen som oppfyller initialbetingelsen $y(0) = -1$ og skisser grafen til denne funksjonen.

Eksamen i MA 001, 10. juni 2002

Oppgave 5

La c_0 være forholdet mellom radioaktivt karbon $^{14}\mathrm{C}$ og vanlig karbon $^{12}\mathrm{C}$ i et levende tre. Anta forholdet i dødt tre avtar eksponensielt med halveringstid 5730 år. I restene av en utgravd trebåt er forholdet mellom $^{14}\mathrm{C}$ og $^{12}\mathrm{C}$ 90% av c_0. Hvor gammel er båten?

Eksamen i MA 001, 9. desember 2002

Oppgave 4

a) La p være en reell konstant. Betrakt differensiallikningsproblemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p\sqrt{x} \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

hvor en initialverdi $x_0 > 0$ er gitt. Verifiser ved innsetting at

$$x = (\sqrt{x_0} + \tfrac{1}{2}pt)^2 \tag{4.2}$$

er en løsning. Vis også hvordan løsningen (4.2) kan utledes av (4.1).

Et rektangulært svømmebasseng er 25 m langt og 12 m bredt. Normal vanndybde er 3 m. Under vedlikehold tømmes bassenget for vann gjennom et avløp i bunnen. Vi antar at vanndybden x som funksjon av tiden t da vil følge Torricellis lov

$$A\frac{dx}{dt} = -a\sqrt{2gx}$$

hvor A er det konstante horisontale tverrsnittsarealet til bassenget, og a er tverrsnittsarealet til avløpet. Anta a =0.2 m^2, og g =9.8 m/s^2.

b) Bestem funksjonen $x = x(t)$ når $x(0)$ =3 m. Hvor lang tid vil det ta før bassenget er tømt?

Eksamen i MA 001, 26. mai 2004

Oppgave 2

La Q være en funksjon av tiden t, $(t \geq 0)$ og anta at Q tifredsstiller differensiallikningen

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = aQ - bQ^2$$

der a og b er positive konstanter.

a) Finn løsningen av denne differensiallikningen med initialbetingelse $Q(0) = Q_0$.

b) Tegn skisser som i grove trekk viser hvordan Q kan variere med tiden.

c) Vekst av populasjoner av infusjonsdyret *Paramecium caudatum* har vist seg med god overensstemmelse å følge differensiallikningen ovenfor, der $Q(t)$ nå betegner antall individer ved tiden t. I et forsøk valgte en å starte med $Q_0 = 100$ individer. Etter ca. 64 timer var det 10^4 individer, og etter ca. en uke hadde populasjonen stabilisert seg på $2 \cdot 10^4$ individer. Bruk noen av disse data til å anslå verdier for konstantene a og b. Skisser grafen til Q.

Eksamen i MA 001, 10. desember 2004

Oppgave 5

I en matematisk modell for størrelsen på en kaninpopulasjon lar vi $N(t)$ være antall kaniner etter t år. Vi setter $N(0) = 1000$. Kaninpopulasjonen er beskrevet av differensiallikningen

$$\frac{dN}{dt} = kN^2$$

der $k = 0,0002$.

a) Finn et uttrykk for $N(t)$ ved å løse differensiallikningen.

b) Denne modellen viser seg å ha noen svake punkter, bl.a. vil antallet kaniner på et gitt tidspunkt vokse over alle grenser. Finn dette tidspunktet.

Oblig 2 i MAT 1000, Høst 2003

Oppgave 4

Noen medikamenter anvendes slik at en dose sprøytes inn under huden, for så langsomt å absorberes i blodet. Absorpsjonen kan antas å skje slik at den mengden stoff som ikke er absorbert avtar eksponensielt med tiden – dvs. som en funksjon på formen

$$g(t) = Ae^{-kt}$$

der t er tiden siden sprøyten ble satt og A og k er positive konstanter. Hvordan kan vi tolke konstanten A?

Samtidig med at nytt stoff absorberes i blodet vil også noe utskilles, og vi kan anta at mengden av stoff i blodet ved tiden t er gitt på formen

$$f(t) = Be^{-kt} - Ce^{-lt}$$

der B, C og l også er positive konstanter, og vi antar $k < l$.

a) Før sprøyten settes antar vi at blodet ikke inneholder noe av medikamentet. Forklar hvorfor vi da må ha $f'(0) = -g'(0)$.
Hva er B og C, hvis vi setter en dose på g_0 enheter?

La fra nå av $k = 0.1$ time^{-1} og $l = 0.4$ time^{-1}, og anta at vi setter en dose på 15 enheter kl 0800.

b) Hvor mange enheter fins i blodet kl 1500? På hvilket tidspunkt er det mest stoff i blodet?

c) De fleste medikamenter er giftige i store doser. Anta at blodet ikke på noe tidspunkt må inneholde med enn 10 enheter. Hva er da den største dosen vi kan sette?

Oblig 2 i MAT 1000, Vår 2005

Oppgave 3

Et radioaktivt stoff A brytes ned til et stabilt stoff B med halveringstid T. Hvis $A(t)$ betegner mengden av stoffet A etter t år, har vi at $A(t) = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$ der A_0 er den opprinnelige mengden av stoffet A. Vi lar $B(t)$ betegne mengden av stoffet B etter t år.

a) Vis at sammenhengen mellom $A(t)$ og $B(T)$ er gitt ved:

$$B(t) = A(t)(2^{t/T} - 1).$$

b) Et radioaktivt stoff som finnes i enkelte bergarter heter rubidium 87 (^{87}Rb). Det brytes ned til strontium 87 (^{87}Sr) med en halveringstid på 4.88×10^{10} år. Geologer bruker noen ganger å bestemme alderen til bergarter ved å måle forholdet mellom innholdet av strontium 87 og rubidium 87. Hvis dette er forholdet er 0.008, hvor gammel er bergarten da?

Eksamen i MAT1000, 13. desember 2006

Oppgave 3

En gruveingeniør har oppdaget at utvinnelsestakten i gruvene hun har ansvar for synker dramatisk den første tiden, men også jevnt videre utover. Ved å se på produksjonstallene for de første ti årene for den enkelte gruve, finner hun ut at utvinnelsestakten følger en formel

$$(1 - \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}})K$$

hvor t er tiden siden oppstart målt i år, og K er en konstant, *gruvekonstanten*, som kan variere fra gruve til gruve.
Hun lurer på om formelen er forenlig med at hver gruve tross alt bare inneholder en begrenset mengde malm.

a) [4 poeng] Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}} dt$$

b) [8 poeng]Finn et uttrykk $g(t)$ for hvor mye malm som er utvunnet fra en gruve med gruvekonstant K etter t år.
Avgør om $\lim_{t\to\infty} g(t)$ eksisterer.

Eksamen i MAT1000, 7. juni 2007

Oppgave 3

Vi betrakter en vekstmodell for en populasjon. I følge modellen er antallet individer i populasjonen på tidspunktet t gitt ved funksjonen

$$N(t) = \frac{B}{1 + ke^{-\lambda Bt}}.$$

der B, k og λ er konstanter.

a) Hva er populasjonens vekstrate på tidspunktet $t = 0$?

b) Vis at funksjonen $N(t)$ og dens deriverte $N'(t)$ tilfredsstiller ligningen

$$N'(t) = \lambda N(t)\big(B - N(t)\big).$$

Tillegg C

Fasit og løsningsforslag

C.1 Kapittel 1

Oppgave 1

a) $\mathbb{R}$

b) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

c) $[0, \infty)$

d) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

e) $\mathbb{R}$

f) $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \cup ...$

Oppgave 2

a) $[0, \infty)$

b) $[-2, 2]$

c) $\mathbb{R}$

d) $[1, \infty)$

e) $\mathbb{R}$

f) $[1, \infty)$

g) $[5, 11]$

Oppgave 3

a) ∞

b) -2

c) ∞

d) $-\infty$

Oppgave 4

a) 1

b) 0

Oppgave 5

a) Eksisterer ikke. Verdien av $\sin(\frac{1}{x})$ vil pendle mellom -1 og 1 når $x \to 0$.

b) Eksisterer ikke. Verdien av $\cos(\frac{1}{x})$ vil pendle mellom -1 og 1 når $x \to 0$.

c) Eksisterer og er lik 0. Husk regnereglene for grenseverdier.

d) Eksisterer og er lik 0. Husk regnereglene for grenser og definisjonen av tangensfunksjonen.

Oppgave 6 Maks 7 og min 5.

Oppgave 7 (sjekk graf på kalkulator)

a) $\omega = 2, T = \pi$

b) $\omega = \frac{\pi}{13}, T = 26$

c) $\omega = 8, T = \frac{\pi}{4}$

d) $\omega = \frac{3\pi}{7}, T = \frac{14}{3}$

Oppgave 8 Middelverdi, amplityde, periode, akrofase (sjekk graf på kalkulator):

a) $3, 2, 5, 2$

b) $-1, 1, 1, 3$

c) $0, 1, 1, \frac{1}{2}$

Oppgave 9 Middelverdi, amplityde, periode, akrofase:

a) $0, 1, \frac{5}{2}, 0$

b) $-\frac{1}{2}, 3, 1, 1$

c) $\pi, \frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{\pi}, 1, \frac{\pi^2}{2}, \frac{\pi}{2}$

Opppgave 10

a) $\sqrt{2}\cos(x - \frac{3\pi}{4})$

b) $2\sqrt{3}\cos(3x - \frac{11\pi}{6})$

c) $2\cos(\frac{x}{4} - \frac{4\pi}{3})$

Oppgave 11 Vi har

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}. \tag{C.1}$$

Vi bruker at $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, og regner først ut venstresiden i (C.1):

$$\begin{aligned} e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \sin y \cos x) \end{aligned}$$

(sjekk!). Høyresiden i (C.1) er

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y).$$

Vi sammenligner realdelene og får

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Hvis vi nå erstatter y med $-y$ får vi formelen vi ville vise:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

siden $\cos(-y) = \cos y$ og $\sin(-y) = -\sin y$.

Vi merker oss at vi får formelen

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

på kjøpet ved å sammenligne imaginærdelene.

C.2 Kapittel 2

Oppgave 12

a) $f'(x) = 5x^4 + 4x$

b) $g'(x) = \frac{-7x^8 - 35x^6 + 2x}{x^2+5}$

c) $h'(x) = -\frac{3}{x}$

d) $k'(x) = \frac{-x^4+14x^3-6x^2-2x+7}{(x^3-1)^2}$

e) $m'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$

f) $n'(x) = n(x) = \sqrt{e^{2x}} = e^x$

Oppgave 13

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|}$$

(ikke deriverbar for $x = 0$).

Oppgave 14

a) $f'(x) = -\tan x + \frac{\cos x}{2}$

b) $f'(x) = \frac{(12x^2+5)\sin(x+2)-(4x^3+5x)\cos(x+2)}{(\sin)^2(x+2)}$

c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x-1}$

Oppgave 15

a) $f_1'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2x$

b) $f_2'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})+1}{2\sqrt{x}}$

c) $f_3'(x) = \frac{6x^2\cos(x^2)-3\sin(x^2)}{9x^2}$

Opppgave 16

a) $f'(x) = (\ln \pi)\pi^x$

b) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

c) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

Oppgave 17

a) Passer.

b) Passer ikke.

c) Passer.

d) Passer ikke.

e) Passer.

f) Passer ikke.

g) Passer.

Oppgave 18

a) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$

b) $\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} - x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

c) $\frac{3}{2}e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

d) $-\frac{1}{4}\cos(x^4) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

e) $\frac{3}{2}\ln|\frac{x-2}{x}| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

f) $\frac{1}{3}\ln|\frac{x-1}{x+2}| + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Oppgave 19

a) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

b) $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$

c) $\frac{1}{2}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + C$

Oppgave 20

a) $3x \ln x - 3x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

b) $\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2}x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

c) $\frac{1}{2}x \ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$

d) $-2x^{\frac{3}{2}} \cos \sqrt{x} + 6x \sin \sqrt{x} + 12\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 12 \sin \sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

e) $-(x^2 + x - 2) \cos x + (2x + 1) \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

C.3 Kapittel 3

Oppgave 21

a) $y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = 2 + e^{-2x^2}C, \quad C \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{x}{2}}C, \quad C \in \mathbb{R}$

Oppgave 22

a) Integrerende faktor: e^{x^2}. Vi multipliserer likningen med faktoren og får:

$$\begin{aligned} e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy &= e^{x^2}x \\ (e^{x^2}y)' &= xe^{x^2} \\ e^{x^2}y &= \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C \\ y(x) &= \tfrac{1}{2} + Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Integrerende faktor: e^x. Løsningene blir

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) Integrerende faktor: e^{2x}, som gir

$$(e^{2x}y)' = e^{3x}x$$

Høyresiden integreres ved delvis integrasjon:

$$\int xe^{3x}\ dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

som gir løsningene

$$y(x) = \frac{1}{3}xe^{x} - \frac{1}{9}e^{x} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

d) Vi deler likningen med x^2+1, og ser at for å finne en integrerende faktor, må vi antiderivere $\frac{3x}{x^2+1}$. Én antiderivert er $\frac{3}{2}\ln(x^2+1)$, som gir integrerende faktor $e^{\frac{3}{2}\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$.

$$\begin{aligned}
y' + (\tfrac{3x}{x^2+1})y &= \tfrac{6x}{x^2+1}\\
((x^2+1)^{\frac{3}{2}}y)' &= 6x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\\
(x^2+1)^{\frac{3}{2}}y &= 2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C\\
y(x) &= 2 + C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Oppgave 23 Vi manipulerer litt på likningen, og må anta $x \neq 0$. Én integrerende faktor blir

$$e^{2x-3\ln|x|} = \frac{e^{2x}}{|x|^3}.$$

Vi får:

$$\begin{aligned}
y' + (\tfrac{2x-3}{x})y &= 4x^3\\
(\tfrac{e^{2x}}{|x|^3}y)' &= 4\tfrac{x^3}{|x|^3}e^{2x}\\
\tfrac{e^{2x}}{|x|^3}y &= 2\tfrac{x^3}{|x|^3}e^{2x} + C\\
y(x) &= 2x^3 + C|x|^3e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dette gir følgende løsninger for $x \neq 0$ (se også Eksempel 3.9):

$$y(x) = \begin{cases} 2x^3 + C_1 x^3 e^{-2x}, & x < 0 \\ 2x^3 + C_2 x^3 e^{-2x}, & x > 0, \end{cases}$$

der $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (fortegnet fra absoluttverdien er tatt inn i konstantene).

Siden likningen vi skal løse er definert for alle $x \in \mathbb{R}$, skal spesielt $y(0)$ og $y'(0)$ eksistere, og vi ser at både $y(0)$ og $y'(0)$ blir 0, dvs. vi kan ta med $x = 0$ i et av intervallene, og får løsninger

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} 2x^3 + C_1 x^3 e^{-2x}, & x < 0 \\ 2x^3 + C_2 x^3 e^{-2x}, & x \geq 0, \end{cases}}$$

der $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. (Forekomstene av x^3 gjør altså at $y'(x)$ går mot 0 når x går mot 0, og vi trenger ikke å kreve at $C_1 = C_2$, slik vi måtte i Eksempel 3.9.)

Oppgave 24 Vi separerer og antideriverer.

a)

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\sqrt{y}} &= 2x \\ \int y^{-\frac{1}{2}}\, dy &= \int 2x\, dx \\ 2y^{\frac{1}{2}} &= x^2 + C \\ y(x) &= (\tfrac{1}{2}x^2 + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}. \ \text{(ny } C\text{)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{y'}{\sqrt{y}} &= \sqrt{x} \\ \int y^{-\frac{1}{2}}\, dy &= \int x^{\frac{1}{2}}\, dx \\ 2y^{\frac{1}{2}} &= \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ y^{\frac{1}{2}} &= \tfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} + C \qquad\qquad \text{(ny } C\text{)} \\ y(x) &= (\tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{\sqrt{y-1}} &= 2x \\
\int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy &= \int 2x\,dx \\
2(y-1)^{\frac{1}{2}} &= x^2 + C \\
y - 1 &= (\tfrac{1}{2}x^2 + C)^2 \qquad\qquad\qquad \text{(ny } C\text{)} \\
y(x) &= 1 + (\tfrac{1}{2}x^2 + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Oppgave 25

a) $y(x) = \sqrt[3]{\frac{15}{2}x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = x \sin x + \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = \ln(\frac{e^{2x}}{2} + C), \quad C \in \mathbb{R}, C > -\frac{e^{2x}}{2}$

Oppgave 26

a) $y(x) = Ce^{(-1+\sqrt{6})x} + De^{(-1-\sqrt{6})x}, \quad C, D \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = Ce^{(1+\sqrt{33})x} + De^{(1-\sqrt{33})x}, \quad C, D \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}, \quad C, D \in \mathbb{R}$

Oppgave 27

a) Den karakteristiske likningen er $r^2 - \frac{7}{2}r + \frac{3}{2} = 0$, som har to reelle røtter, $r = \frac{1}{2}$ og $r = 3$. Formel (3.12) gir dermed løsningene

$$y(x) = Ce^{\frac{x}{2}} + De^{3x}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

b) Karakteristisk likning: $r^2 + 4r = 0$, som har røtter $r_1 = 0$ og $r_2 = -4$, så formel (3.12) gir

$$y(x) = C + De^{-4x}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

c) Karakteristisk likning: $r^2 - 10r + 25 = 0$, dvs. $(r-5)^2 = 0$, så kun én rell rot. Formel (3.13) gir løsningene

$$y(x) = Ce^{5x} + Dxe^{5x}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

d) Den karakteristiske likningen er $r^2 - 4r + 5 = 0$, som har to komplekse røtter, $2 \pm i$. Formel (3.14) gir nå løsningene

$$y(x) = Ce^{2x}\cos x + De^{2x}\sin x, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Oppgave 28

a) $y(x) = e^{-\frac{3}{2}x}(C\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + D\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)), \quad C, D \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = e^{-x}(C\cos(\sqrt{2}x) + D\sin(\sqrt{2}x)), \quad C, D \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = Ce^{(\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{26}}{4})x} + De^{(\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{26}}{4})x}, \quad C, D \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = Ce^{5x} + De^{-x}, \quad C, D \in \mathbb{R}$

Oppgave 29

a) $y(x) = 6e^{x} - 4$

b) $y(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$

c) $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(1 + 7e^{(2-2x)})$

Oppgave 30 Først løser vi likningen

$$L' = -k\sqrt{L}, \ k > 0$$

som er separabel (vi antar $L(t) \neq 0$):

$$\begin{aligned}
\frac{L'}{\sqrt{L}} &= -k \\
\int \frac{1}{\sqrt{L}} dL &= \int -k dt \\
2L^{\frac{1}{2}} &= -kt + C \\
L^{\frac{1}{2}} &= -\frac{k}{2}t + C \qquad \text{(ny } C\text{)} \\
L(t) &= (-\frac{k}{2}t + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Betingelsen $L(0) = 900$ gir at $C = 30$, så vi har funksjonen

$$L(t) = (-\frac{k}{2}t + 30)^2$$

(polynomfunksjon!). For å bestemme k kan vi bruke betingelsen $L(6) = 441$, som gir at $k = 3$ eller $k = 17$. Vi skal finne tidspunktet t_1 slik at $L(t_1) = 0$. Hvis vi bruker $k = 17$, gir dette at $t_1 \approx 3.5$, som ikke er mulig (det kan ikke være 0 laks igjen etter 3.5 uker hvis det er 441 igjen etter 6 uker).

Bruker vi derimot $k = 3$, får vi at

$$(-\frac{3}{2}t_1 + 30)^2 = 0$$

som gir $t_1 = 20$, dvs. all laksen er død etter 20 uker.

Oppgave 31

a) Difflikningen har løsninger (vi antar $M(t) \neq 0$)

$$M(t) = (-\frac{k}{3}t + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}$$

og betingelsen $M(0) = 1$ gir $C = 1$, så $M(t)$ heter

$$M(t) = (-\frac{k}{3}t + 1)^3$$

(polynomfunksjon!) når vi starter med ei møllkule som veier ett gram.

b) Vi bruker $M(75) = 0.5$ til å finne k, som blir tilnærmet 0.00824. For å finne t_1 slik at $M(t_1) = 0$ får vi likningen

$$-\frac{0.00824}{3}t_1 + 1 = 0$$

som gir $t_1 \approx 364$ dager.

Oppgave 32 Den generelle løsningen er

$$M(t) = Ce^{-0.0005t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Kall mengden ved $t = 0$ for M_0. Da er

$$M(t) = M_0 e^{-0.0005t}$$

og

$$M(1000) = M_0 e^{-0.5} \approx 0.6 M_0$$

som vil si at ca 60% er igjen etter 1000 sekunder.

Likningen

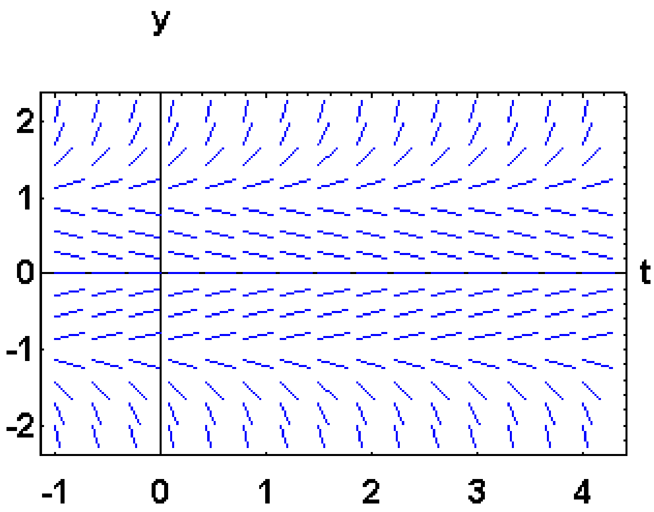
$$0.1 M_0 = M_0 e^{-0.0005t}$$

gir $t \approx 4605$, dvs. det tar ca. 4605 sekunder før mengden nitrogenpentoksid er redusert til 10% av det opprinnelige.

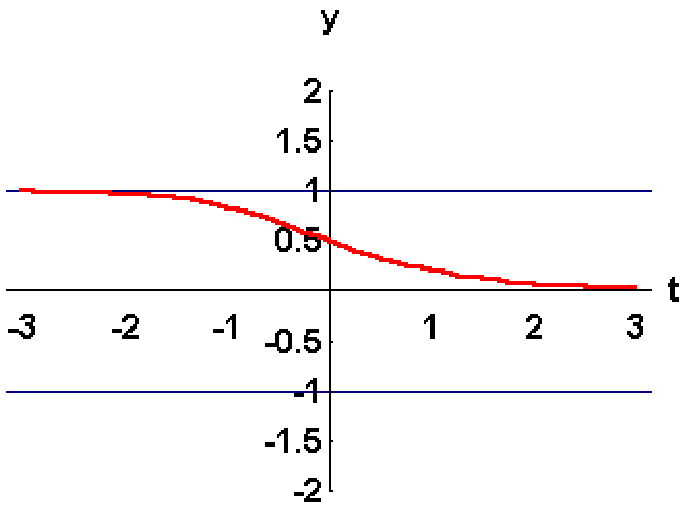
Oppgave 34

a) Siden vi ikke vet funksjonen $f(y)$, vil vi bare kunne skissere retningsdiagrammet, som vil fortelle oss hvordan løsningene oppfører seg. For å se variasjonene i løsningene, må vi ta for oss nullpunktene og fortegnet til $f(y)$ gitt av grafen.

   Nullpunktene til $f(y)$ leses av som -1, 0 og 1. Videre ser vi at når $y < -1$ er løsningene avtagende (negativt stigningstall), voksende for $-1 < y < 0$ og for $y > 1$, og avtagende igjen for $0 < y < 1$. Dette gir følgende retningsdiagram

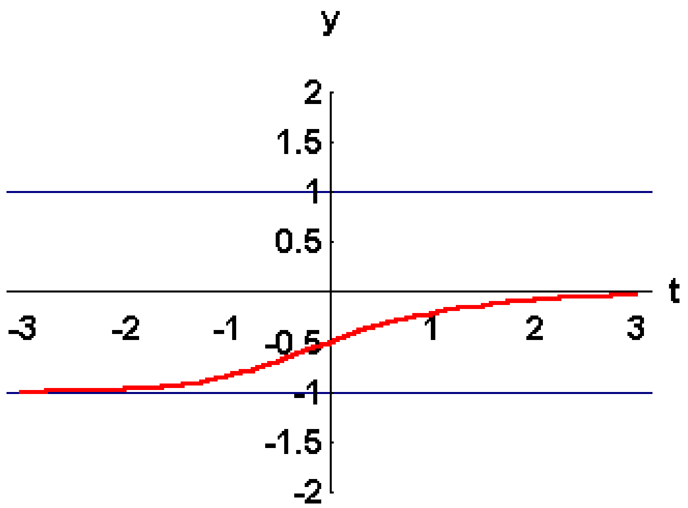


b) Fra retningsdiagrammet følger vi retningene ut fra punktet $y(0) = \frac{1}{2}$. Dette gir skissen



Vi ser at grensen $\lim_{t\to+\infty} = 0$.

c) Tilsvarende som i b) følger vi retningene fra punktet $y(0) = -\frac{1}{2}$ og får skissen



Vi ser at grensen $\lim_{t\to+\infty} = 0$.

C.4 Kapittel 4

Oppgave 35 Likningen er

$$y' - 0.02y = 40\,000, \quad y(0) = 2\,000\,000$$

med løsning

$$y(t) = 4\,000\,000e^{0.02t} - 2\,000\,000.$$

Oppgave 36 Spør gruppelærer om forklaringene dine er gode nok. Ellers står svarene i oppgaven.

Oppgave 37 Forandringen i klormengden måles av y'. Hver dag fylles det på med 50 000 liter vann med klorprosent på 0.001, dvs. hver dag fylles det på 0.5 liter klor. Dessuten tappes det ut 50 000 liter av de opprinnelige 1 000 000 literne, dvs. $\frac{1}{20}$ av den kloren som er der opprinnelig tappes ut, og vi får

$$y' = 0.5 - \frac{1}{20}y.$$

Den generelle løsningen av denne likningen er

$$y(t) = 10 + Ce^{-\frac{1}{20}t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vi starter med 1 000 000 liter vann med 0.004% klor, dvs. $y(0) = 40$ (liter klor), som gir spesiell løsning

$$y(t) = 10 + 30e^{-\frac{1}{20}t}.$$

Likningen $y(t) = 30$ (som gir klorprosent 0.003) gir $t \approx 8.1$, dvs. at det tar litt over 8 dager før klorprosenten er nede i 0.003.

Oppgave 38

a) Difflikningen er

$$T'(t) = k(A - T(t)) \tag{C.2}$$

der A er lufttemperaturen, $T(t)$ er temperaturen i melken, og k er proporsjonalitetsfaktor.

Likningen (C.2) er en første ordens lineær difflikning, og løses ved å multiplisere med integrerende faktor, som i dette tilfellet er e^{kt}. Dette gir:

$$\begin{aligned} (e^{kt}T(t))' &= e^{kt}kA \\ e^{kt}T(t) &= Ae^{kt} + C \\ T(t) &= A + Ce^{-kt} \end{aligned}$$

der $C \in \mathbb{R}$ er integrasjonskonstanten. Setter vi $C = B$ og $k = \alpha$, har vi en løsning på den ønskede formen

$$T(t) = A + Be^{-\alpha t}. \tag{C.3}$$

For å bestemme B og α, setter vi inn de gitte opplysningene $A = 20, T(0) = 6$ og $T(2) = 13$ i likning (C.3). Dette gir $B = -14$ og $\alpha = \frac{\ln 2}{2}$, dermed får vi

$$T(t) = 20 - 14e^{-\frac{\ln 2}{2}t}. \tag{C.4}$$

b) Vi setter inn $t = 3$ i (C.4), og regner ut at $T(3) \approx 15.0$°C, så temperaturen i melken stiger til ca. 15°C etter enda en time på benken.

c) Vi skifter scenario: Vi har fortsatt melken og kjøleskapet, så løsningen (C.3) gjelder fortsatt, med samme proporsjonalitetskonstant, $\alpha = \frac{\ln 2}{2}$, men rollen til A er forandret og vi har nye initialbetingelser.

   Vi skal nå finne A, som fortsatt er temperaturen *utenfor* melkekartongen, men nå kjøleskapstemperaturen. Så $T(t)$ heter nå

$$T(t) = A + Be^{-\frac{\ln 2}{2}t},$$

   hvor vi kan sette inn de gitte opplysningene $T(0) = 15$ og $T(1) = 12$. Dette gir to likninger med to ukjente, og vi finner at $B \approx 10.2$ og kjøleskapstemperaturen $A \approx 4.8$°C.

Oppgave 39 Vi må altså finne k, som vil variere med situasjonen. Likningen (A.1) er første ordens lineær og kan løses helt tilsvarende som i Oppgave 38. Ved å bruke betingelsene gitt i denne situasjonen, $A = 24$, $T(8) = 28$ og $T(9) = 26$, kan vi finne integrasjonskonstanten og k:

Likningen $T'(t) = -kT(t) + kA$ løses altså med integrerende faktor e^{kt}, og gir $T(t) = A + Ce^{-kt}$, $C \in \mathbb{R}$, dvs.

$$T(t) = 24 + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Opplysningene gir oss likningene

$$\begin{aligned} 28 &= 24 + Ce^{-8k} \\ 26 &= 24 + Ce^{-9k} \end{aligned}$$

Ved å sette de to uttrykkene for C lik hverandre, får vi

$$2 = 4e^{-k},$$

dvs. $k = \ln 2$. Setter vi dette inn for k, finner vi at $C = 1024$, så

$$T(t) = 24 + 1024e^{-(\ln 2)t}.$$

(eksponentialfunksjon!) Vi vil nå finne tidspunktet t_0 slik at $T(t_0) = 37$:

$$\begin{aligned}
37 &= 24 + 1024e^{-(\ln 2)t_0} \\
e^{-(\ln 2)t_0} &= \frac{13}{1024} \\
t_0 &= \frac{\ln \frac{1024}{13}}{\ln 2} \\
t_0 &\approx 6.3.
\end{aligned}$$

Omgjort til timer gir dette dødstidspunkt ca. kl. 06:20.

Oppgave 40 Det begynte å snø kl. 11.30.

Hint mot løsning: Finn tiden som funksjon av strekningen for hver av de tre bilene 1,2 og 3: $t_1(s), t_2(s)$ og $t_3(s)$. Hvis t_0 er tidspunktet det startet å snø, målt i timer før kl. 12, får vi at $t_1(s)$ oppfyller likningen (ved antagelser)

$$t_1' = t_0 + t_1, \quad t_1(0) = 0.$$

Løsningen av denne brukes til å finne likningen for $t_2(s)$, som brukes til å finne $t_3(s)$. Dette vil gi endel regning som ender opp med at $t_0 = \frac{1}{2}$.

Oppgave 41 a) Endringen i bensinvolumet fra vi har kjørt x mil til vi har kjørt $x + \Delta x$ mil er $V(x + \Delta x) - V(x)$. Denne endringen skyldes (tilnærmet) to ting: et konstant forbruk på 0.7 liter per mil og en lekkasje gitt ved $0.1(V(x)\Delta x)$. Dette gir

$$V(x + \Delta x) - V(x) \approx -0.7\Delta x - 0.1V(x)\Delta x,$$

som når vi deler med Δx og lar Δx gå mot null gir likningen

$$V'(x) = -0.7 - 0,1V(x)$$

siden tilnærmelsen blir bedre og bedre jo mindre Δx er.

Likningen er førsteorden lineær, og løses med integrerende faktor $e^{0.1x}$. Vi får løsningene

$$V(x) = -7 + Ce^{-0.1x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(eksponentialfunksjon!)
b) $V(0) = 20$ gir $C = 27$, og vi må finne x_1 slik at

$$-7 + 27e^{-0.1x_1} = 0.$$

Dette gir $x = 10 \ln \frac{27}{7} \approx 13.5$, så vi kan kjøre 13.5 mil med 20 liter bensin.
c) Situasjonen er nå en litt annen: Vi ønsker at tanken skal være tom etter 18.5 mil, dvs. $V(18.5) = 0$, dermed skal vi finne en erstatning for opplysningen $V(0) = 20$, dvs. vi må regne ut integrasjonskonstanten C på nytt (selve likningen og generell løsning gjelder fortsatt).

$V(18.5) = 0$ gir $C = 7e^{1.85}$, og dermed blir $V(0) = -7 + 7e^{1.85} \approx 37.5$. Vi må altså ha 37.5 liter på tanken ved start for å komme frem til Lillehammer.

Oppgave 42

a) Likningen blir

$$K'(t) = -nK(t) \tag{C.5}$$

der $n > 0$ er proporsjonalitetsfaktor. Vi har minustegn fordi endringen er negativ.

b) Integrerende faktor: e^{nt} gir generelle løsninger

$$K(t) = Ce^{-nt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

For å finne C og n, bruker vi opplysningene $K(28) = \frac{1}{2}P$ og $K(4) = 0.843P$. Den første opplysningen gir $C = \frac{1}{2}Pe^{28n}$ mens den andre gir $n \approx 0.022$, dvs.

$$K(t) \approx \frac{1}{2}Pe^{0.022(28-t)} \approx 0.93Pe^{-0.022t}, \quad t \geq 4.$$

Likning (4.1) gjelder altså for $0 \leq t \leq 4$, mens likning (C.5) gjelder for $t \geq 4$. Dermed heter funksjonen $K(t)$ som viser elevens kunnskapsmengde t måneder etter oppstart

$$K(t) = \begin{cases} P(1 - e^{-\frac{\ln 2}{1.5}t}) & 0 \leq t \leq 4 \\ 1.01Pe^{-0.022t} & t > 4. \end{cases}$$

Oppgave 43 Vi setter inn i modellen for frie svingninger:

$$my'' + qy' + ky = 0$$

der q er friksjonskonstanten og k er fjærkonstanten. Det gir likningen.

Vi løser likningen og regner. Da finner vi at $\alpha \geq \beta$ der

$$[1 + (1 - \beta)^2]e^{-2\beta} = 10^{-6}$$

Grafisk: $\alpha \approx 9.0$.

Oppgave 44

a) $x(t)$ modellerer rovdyrene (positiv vekst mhp. byttedyrene), $y(t)$ byttedyrene

b) $x''(t) = by'(t) = -bcx(t)$

c) $x(t) = x_0 \cos(t\sqrt{bc}) + \sqrt{\frac{b}{c}} y_0 \sin(t\sqrt{bc})$
$y(t) = y_0 \cos(t\sqrt{bc}) - \sqrt{\frac{c}{b}} x_0 \sin(t\sqrt{bc})$

d) $N_1(t) = -209.8 \sin(t\sqrt{4.2}) + 300$
$N_2(t) = -8600 \cos(t\sqrt{4.2}) + 10\,000$
Tegn disse i samme koordinatsystem. Toppene er forskjøvet i forhold til hverandre: rovdyrene lever av byttedyrene, og når det er mange av den ene arten, blir det færre av den andre og omvendt. Legg merke til at vi har harmoniske svingninger, og at rovdyr og byttedyr (rev og lemen?) i denne modellen lever i harmoni...

C.5 Tidligere eksamensoppgaver

Det er ikke gitt fasit på disse her. Mange av oppgavene har løsningsforslag liggende på nettet (under kurssiden), mens resten vil bli gjennomgått på forelesninger, plenum og grupper. Vi ønsker at dere skal prøve dere på disse oppgavene uten fasit (litt som en eksamen, men med den forskjellen at dere får hjelp etterhvert).

Tillegg D

Støtte- og tilleggslitteratur

- *Kalkulus* av Tom Lindstrøm, 3. utgave, Universitetsforlaget 2006. Pensumbok i MAT1100 og MAT-INF1100.
- *Matematikk i praksis* av Tor Gulliksen, 4. utgave, 5. opplag, Universitetsforlaget 2006. Tidligere pensumbok i MAT1000.
- *Calculus made easy* av Silvanus P. Thompson og Martin Gardner, St. Martin's Press 1998.
- *Differential equations and their applications* av Martin Braun, 3. utgave, 3. opplag, Springer 1986.
- Husk at det er mange bøker om emnene i dette kurset, bl.a. differensiallikninger, på Matematisk bibliotek i 2. etasje i Niels Henrik Abels hus. De står i laveregradsavdelingen sammen med annen støttelitteratur og populærmatematiske bøker. På biblioteket finner du også pensumlitteratur til dagslån og pensumbøker fra videregående til utlån.

Tillegg E

Norsk-engelsk ordliste

For oppslag i engelske lærebøker eller på nettet, har vi tatt med en engelsk oversettelse av ordene og begrepene i registeret (som fins bakerst i kompendiet).

absoluttverdifunksjonen absolute value function

akrofase acrophase

amplityde amplitude

andre ordens lineær homogen difflikning med konstante koeffisienter second order linear homogeneous differential equation with constant coefficients

antiderivert antiderivative (**antiderivering:** 'antidifferentiation' or 'indefinite integration')

asymptote asymptote

bærekapasitet carrying capacity

cosinusfunksjon cosine function

cosinuskurven cosine curve

definisjonsmengde domain

delbrøksoppspalting partial fraction decomposition

delvis integrasjon integration by parts

dempet svingning damped oscillator

deriverbar differentiable

derivert funksjon $f'(x)$ the derivative of the function f

differensial differential

differensiallikning differential equation (**ordinær difflikning** *forkortes* ODE for ordinary differential equation)

difflikning differential equation

diskret funksjon discrete function

doblingstid the doubling time

eksponentialfunksjon exponential function

endepunkt end point or endpoint

faseform (to us:) on the form $A\cos(dx + \phi)$ (where ϕ is called the phase)

funksjon function

første ordens lineær difflikning first order linear differential equation

generell antiderivert the general antiderivative

generell løsning general solution

graf graph

grunntall the base (of an exponential function)

halveringstid half-life (period/time)

harmonisk svingning a (simple) harmonic motion (also: undamped oscillator)

initialbetingelse initial value

initialverdiproblem initial value problem

integralkurve integral curve

integrasjonskonstant constant of integration

integrerende faktor integrating factor

karakteristisk likning (til en andre ordens difflikning) characteristic equation (of a second order differential equation)

kjerneregelen the chain rule

konstant funksjon constant function

kontinuerlig continuous

kritisk dempet svingning critically damped oscillator

kvadratisk funksjon quadratic function

løsning (av en difflikning) solution (of a differential equation)

lineær function linear function

logaritmefunksjon logarithmic function

logistisk vekst logistic growth

middelverdi (for harmonisk svingning) 'equilibrium position'

modell (matematisk) model (mathematical)

modellering modelling

momentan forandring the instantaneous rate of change

n-tegradsfunksjon a polynomial function of degree n

naturlig logaritme natural logarithm (logarithm to the base e)

orden (til en difflikning) order (of a differential equation)

overkritisk dempet svingning overdamped oscillator

parabel parabola

partikulær løsning particular solution

periode period

periodisk funksjon periodic function

polynomfunksjon polynomial function

proporsjonale størrelser proportional quantities

rasjonal funksjon rational function

relativ vekstrate specific (relative) growth rate

retningsdiagram slope field

retningslinjer lines of slope

rotfunksjon 'root function' (functions of the form $Cx^{\frac{m}{n}}$ and linear combinations of such)

sammensetning (av funksjoner) composition (of functions)

sekant secant (line)

separabel difflikning separable differential equation

sinusfunksjon sine function

sinuskurven sine curve

sirkelfrekvens 'circle frequency' ($\frac{2\pi}{T}$ where T is the period)

spesiell løsning particular solution

spesifikk vekstrate specific growth rate

stigningstall the slope (of a line)

substitusjon substitution

tangensfunksjon tangent (function)

tangent tangent (line)

trigonometrisk funksjon trigonometric function

ubestemt integral indefinite integral

variabel variable

vekst growth

vekstrate growth rate, rate of growth

verdi value

verdimengde range (the set of values of a function)

Register