Multippel integrasjon.

Geir Ellingsrud

21. april 2004

NB: Dette er en midlertidig versjon datert 21. april 2004. Den kommer til å bli utvidet og korrigert fortløpende!!

0.1 Dobbelt integralet over rektangler og iterert integrasjon

I disse notatene skal vi studere hvordan man integrere funksjoner av flere variable, og vi skal vise noen enkle anvendelser av multiple integraler.

La oss staret med en kort rekapitulasjon av envariabelteorien; så la f være en funksjon som er kontinuerlig på et intervall $[a, b]$. Integralet $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ har flere egenskaper:

Antiderivert. Vi vet at dersom vi deriverer et integralet med hensyn på den øvre grensen, finner vi tilbake funksjonen vi integrerte:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x).$$

Dette er en av de mest fundamentale egenskapene til integralet, og den ligger til grunn for hvordan vi kan beregne integraler. I boken til TG blir dette også tatt som definisjonen av integralet.

Geoemetrisk tolkning: La for en stund f være positiv på hele intervallet $[a, b]$. Da vet vi at den geometriske tolkningen av $\int_a^x f(x)dx$ er størrelesen på arealet mellom grafen til f og x-aksen. Generelt, dersom f ikke nødvendigvis er positiv i hele sitt definisjonsområde, må vi regnet arealet *algenraisk*; det deler av det som ligger under x-aksen regnes med negativt fortegn, mens de som ligger over, selvsagt, regnes postivt.

En tredje egenskap som er viktig for mange av anvendelsen, er:

Riemannsum: Hvis vi tenker oss at intervallet $[a, b]$ er inndelt i en rekke delintervaller ved hjelp av delingspunkter $a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, og vi velger ett punkt x_i i hvert delintervall — altså $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$ — så vil summen (som altså kalles en*Riemannsum*)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(a_{i+1} - a_i)$$

være en god approksimasjon til integralet $\int_a^b f(x)dx$. Dette gjelder når lengden av delintervallene er små, altså når Δx_i er liten. Vi har her innført notasjonen $\Delta x_i = a_{i+1} - a_i$ for lengden av det i-te delintervallet.

I grensen, når $\Delta x_i \to 0$ gjelder til og med likhet:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

La oss nå se på en funksjon av to variable, $f(x, y)$. Vi skal studere denne over et område R i planet, og vi tenker oss, i første omgang, at f er positiv i hele R. Vi skal innføret dobbelt integralet — i analogi med den andre egenskapen ovenfor til enkelt integralet — som volumet V av legemet L som ligger mellom grafen til f og xy-planet og som ligger over omådet R. Vi skal prøve å sette opp et utrykk for dette volumet. Presist kan dette legemet beskrives slik:

$$L = \{(x, y, z)|(x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Området R kan ha mange former, og det er en av de store forskjellene fra envariabelteorien, men som en start, skal vi anta at R er et rektangel. Mer presist, vi skal anta at x-koordinatene til punkter i R ligger i et intervall $[a, b]$ og y-koordinatene i et interval $[c, d]$.

Vi tenker oss at vi deler opp legemet vårt i en rekke skiver ved å legge snitt prallelt med xz-planet. Disse snittene er er gitt ved at $y = t$ der t er et tall i intervallet $[c, d]$.

Arealet av et slikt snitt, gitt ved $y = t$, vi kaller vi $A(t)$, og vi kan beregne det ved integralet:

$$A(t) = \int_a^b f(x, t)dx$$

Vi kan nemlig tenke på et slikt snitt som delen av et plan (planet y=t) mellom x-aksen og grafen til funksjonen $f(x, t)$.

Vi tenker oss så at det opprinnelige legemet L tilnærmes med et nytt legeme. Vi velger delpunkter $c = c_0 \ldots < c_i < \ldots < c_n = d$ i intervallet $[c, d]$ og for hver i, $0 \leq i < n$ danner vi oss en ny, "rett" skive med grunnflate lik snittet $y = c_i$ og tykkelse $\Delta y_i = c_{i+1} - c_i$; mer presist kan en slik skive beskrives slik:

$$(x, y, z)|0 \leq z \leq f(x, c_i), y \in [c_{i+1}, c_i].$$

Volumet av skiven er jo lik grunnfalten ganger høyden, og er altså lik

$$A(c_i)\Delta y_i,$$

og summerer vi opp alle volomuene av alle de "rette" skivene, finner vi følgene tilnærming til volumet av legemet L:

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)\Delta y_i.$$

Dette er jo nettopp en Riemannsum for integralet $\int_c^d A(y)dy$, og lar vi nå delingspunktene i $[c, d]$ ligge tettere og tettere, det vil si at vi lar Δy_i gå mot null, vil vi i grensen av Riemannsummene finne dette integralet. På den annen side, når skivene velges tynnere og tynnere, får vi en bedre og bedre tilnærming til legemet vårt, og i grensen finner vi volmuet vi søkte. Vi har altså:

$$V = \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)\Delta y_i = \int_c^d A(y)dy,$$

og setter vi inn uttrykket for $A(y)$ ovenfor, finner vi

$$V = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)dx)dy.$$

I ord: Vi bestemmer volumet V ved først å integrere f med hensyn på x, fra a til b, og dernest integrere f med hensyn påy, fra c til d. Dette kalles *iterert integrasjon*, eller *gjentatt integrasjon*.

Eksempel: La oss finne volumet V som avgrenses av xy-planet, planene $x = 0$ og $x = 5$, planene $y = 1$ og $y = 6$ og grafen til $f(x, y) = xy$. Dette legemet ligger mellom xy-planet og grafen til f og over rektanglet R der $x \in [0, 5]$ og $y\imath[1, 6]$. Volumet er gitt ved dobbeltinegralet

$$V = \int_1^6 (\int_0^5 xydx)dy$$

som vi beregner ved iterert integrasjon. Vi finner

$$V = \int_1^6 (\int_0^5 xydx)dy = \int_1^6 (|_0^5 \frac{1}{2} x^2 y)dy = \int_1^6 \frac{25}{2} ydy = \frac{25}{2} |_1^6 \frac{1}{2}\ y^2 = \frac{25 \cdot 35}{4}$$

Den første bemerkningen er at vi kunne like gjerne delt opp legemet L i skiver som var parallelle med yz-planet, og så gjenneomført et tilsvarende resonnement. Da ville vi ha funnet:

$$V = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx$$

Her integrerer vi først med hensyn på y og så med hensyn på x, som altså er den motsatte rekkeføgen fra det vi gjorde ovenfor. Vi finner selvsagt samme svar (volumet er jo det samme uansett hvordan vi beregner det), så moralen er: Ved iterert integrasjon kan vi velge rekkefølgen at de variable vi integrere med hensyn på.

For et dobbeltintegral bruker vi som regel notasjonen:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy$$

og leser "dobbeltintegralet" av f over R. Dersom R er et rektangel som ovenfor, kan vi beregne integralet ved iterert integrasjon:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_c^d(\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

Den andre bemerkningen er at vi ikke nødvendigvis trenger å anta at f er positiv i hele R. Dobbeltintregralet kan allikevel beregnes ved iterert integrasjon, i hvilken rekkefølge vi vil, men det vi da finner, er det "algebraiske" volumet; deler av legemet som ligger under xy-planet, teller negativt, mens deler over teller positivt.

Oppgaver:

- $\int\int_R(x^2+y^2)dxdy$ der R er området begrenset av $x=-1$, $x=1$, $y=-1$ og $y=1$.
- $\int\int_R(x^4y^2+x^2y^4)dxdy$ der R er området begrenset av $x=0$, $x=1$, $y=0$ og $y=1$
- $\int\int_R(xe^{xy})dxdy$ der R er området begrenset av $x=0$, $x=1$, $y=0$ og $y=1$

Eksempel på anvendelse: Massen til et et området R i planet. Vi tenker oss R som en tynn plate laget av et materiale med variabel tetthet som beskrives ved en funksjon $f(x,y)$. Det beyr at tettheten i punktet (x,y) er gitt som $f(x,y)$ i passenende enheter, for eksempel kg/m^2. Den totale massen til platen er da gitt ved

$$M = \int\int_R f(x,y)dxdy.$$

Hvis for eksempel tettheten er gitt ved x^2+y^2, og R er rektangelet med hjørner $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$ og $(2,3)$ blir massen:

$$M = \int_1^2(\int_2^3 x^2dy)dx = \int_1^2 x^2dx = |_1^2\frac{1}{3}x^3 = \frac{7}{3}.$$

Man kan også finne tyngdepunktet til slike områder; x-koordinaten, $\bar{x}$, til tyngdepunktet er gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int \int_R x f(x,y) dx dy$$

og y-koordinaten,$\bar{y}$, ved

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int \int_R y f(x,y) dx dy.$$

For eksempelet ovenfor finner vi

$$\bar{y} = \frac{3}{7} \int_1^2 \int_2^3 y x^2 dy) dx = \frac{3}{7} \int_1^2 |_2^3 y^2 x^2) dx = \frac{3}{7} \int_1^2 5x^2) dx = |_1^2 \frac{5x^3}{3} = \frac{35}{7}.$$

Oppgave: Finn x-koordinaten til tyngdepunktet i dette eksempelet.

0.2 Dobbeltintegralet over andre områder

Vi skal nå se på dobbeltintegralet over noe mere generelle områder enn rektangler, nemlig slike som ligger områder som ligger mellom to grafer. Presist ser de slik ut:

$$R = \{(x,y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

De kalles ofte for områder av type I.

For enkelhets skyld, skal vi igjen anta at f er positiv i hele området, og vi tenker på at vi skal beregne volumet av legemet mellom xy-planet og grafen til f over området R.

Vi bruker samme fremgangsmåte som for rektangler og legger snitt parallelle med yz-planet. Slike snitt er gitt ved ligningen $x = t$. Arealet av et slikt er igjen gitt ved et enkelt integral. For å finne det presise uttrykket ser vi nøyere på snittet. Siden R er avgrenset av grafene til de to funksjonene $g(x)$ og $h(x)$, må y-koordinaten til et punkt i snittet tilfredstille $g(t) \leq y \leq h(t)$, mens z-kordinaten tilfredstiller $0 \leq z \leq f(t,y)$. Vi ser at arealet av snittet er lik arealet av området mellom y-aksen og grafen til $f(t,y)$ (der det nå er y som er den variable) over intervallet $[g(t), h(t)]$. Derfor er dette arealet lik

$$A(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(t,y) dy.$$

En tilsvarende prosess som den vi gjennomførte ovenfor, med tilnærming ved hjelp av "rette", tynne skiver, og en grenseovergang der tykkelsen på skivene går mot null, gir oss følgende utrykk for volumet til legemet:

$$V = \int_a^b (\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy)dx.$$

Igjen er dette en iterert integrasjon, men i motsetning til hva vi fant ovenfor for rektangler, er grensene i det innerste integralet nå funksjoner av x.

Eksempel: R er området gitt ved ulikhetene $1 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq x^2$. Finn dobbeltintegralet $\int\int_R xydxdy$. Her er $g(x) = 0$ og $h(x) = x^2$. Vi regner:

$$\int\int_R xydxdy = \int_1^2 (\int_0^{x^2} xydy)dx = \int_1^2 (|_0^{x^2} \frac{1}{2}xy^2dy)dx = \int_1^2 \frac{1}{2}x^5dx = |_1^2 \frac{1}{12}x^6 = \frac{63}{12}.$$

Vi har nå sett på områder av type I. Det finnes også, selvsagt, områder som sies å være av type II. Disse avgrenses av kurver på formen $x = g(y)$, altså grafer der x-aksen og y-aksen har byttet roller. Presist er et slikt mråde gitt ved:

$$R = \{(x,y)|c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

og formelen for dobbeltintegralet av en funksjon $f(x,y)$ over et slikt område er

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx)dy.$$

Her må vi altså først integrere med hensyn på x for så å foreta en integrasjon med hensyn på y.

Det er å bemerke at vi i begge disse tilfellene ikke alltid kan bytte om integrasjonsrekkefølgen –det kan kun gjøres dersom området både er av type I og av type II.

Eksempel: Beregn $\int\int_R y^2\sin(xy)dxdy$ der R er området mellom $x = y$ og $x = 0$ og der $y \in [0,a]$. Vi regner:

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = \int_0^a (\int_0^y y^2\sin(xy)dx)dy = -\int_0^a y\cos(y^2)dy = \frac{1-\sin(a^2)}{2}.$$

0.3 Dobbeltintegralet i polarkoordinater

Et svært viktig teknikk til å beregne integraler i en varaibel, er substitusjon, som også kan betraktes som et variabel skifte. Vi setter $x = g(t)$ i integralet

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Da blir $dx = g'(t)dt$ og de nye grensene er gitt ved $g(a)$ og $g(b)$, slik at integralet blir lik

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(t))g'(t)dt.$$

Vi skal i et sener avsnitt fortelle hva som skjer om vi skifter variable i et dobbeltintegral, men foreløpig skal vi nøye oss med ett bestemt koordinatskifte, nemlig *polarkoordinater*.

Vi minner om at vi i dette koordinatsystemet som koordinater bruker *radiusvektor*, r, altså avstanden fra punktet vårt til origo, og ϕ, vinkelen mellom den positive x-aksen og radiusvektor, målt i positiv omdreiningsretning. Sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene og polarkoordinatene er gitt ved

$$\begin{aligned} x = & \quad r\cos\phi \\ y = & \quad r\sin\phi. \end{aligned}$$

Vi skal se på dobbeltintegralet av en funksjon $f(x, y)$ over et område R og tenker på dette integralet som volumet mellom grafen (med riktig fortegn), og xy-planet og vi skal bruke polarkoordinater. Vi deler opp området i små skivebiter, altså områder der radiusvektor variarer mellom to nære verdier r og $r + \Delta r$ og ϕ variaerer mellom to nære verdier ϕ og $\phi + \Delta\phi$.

En slik skivebit er begrenset av to stålebiter fra origo og to buedeler av sirkler med sentrum i oriogo og radius henholdsvis r og $r + \Delta r$. De er tilnærmet et rektangel med sider $r\Delta\phi$ (buebitene) og Δr (strålebitene), slik at arealet av en slik skivebit approksimativt blir lik $r\Delta r\Delta\phi$.

Approksimativt finner vi da for volumet under grafen

$$V \approx \sum f(x_i, y_j)r\Delta r\Delta\phi = \sum f(r_i\cos\phi_i, r_j\sin\phi_j)r\Delta r\Delta\phi.$$

I grensen, når Δr og $\Delta\phi$ går mot null finner vi:

$$\int\int_R f(x, y)dxdy = \int\int_{R'} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi$$

Her betegner R' det området i $r\phi$-planet som består av de verdiene for polarkoordinater som tilsvarer punkter i integrasjonsområdet.

Eksempel Finn $\int\int_R xdxdy$ der R er sirkelesektoren med radius a mellom x-aksen og linjen gjennom origo som danner vinkelen $\pi/3$ med x-aksen. Området R' er gitt ved $0 \leq r \leq a$ og $0\phi \leq \pi/3$ som er et rektangel i $r\phi$-planet. Vi finner:

$$I = \int_0^{\pi/3} (\int_0^a r^2 \cos\phi dr) d\phi == \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} a^3 \cos\phi d\phi = \frac{1}{3} a^3 |_0^{\pi/3} \sin\phi = \frac{1}{2} a^3 \sin\pi/3 = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{3}.$$

0.4 Det generelle variabelskiftet

Et generelt variabelskifte i et dobbeltintegral er gitt ved å gi både x og y som funksjoner av to nye variable:

$$\begin{aligned} x = &\quad g(u,v) \\ y = &\quad h(u,v). \end{aligned}$$

Det er to ting som kommer inn. For det frste må vi bestemme hvilke verdier av de nye koordinatene som tilsvarer punkter i intergrasjonsområdet vårt. For det andre, kommer det inn en arealforandringsfaktor: Et lite rektangel i uv-planet tilsvarer en liten bit av intergrasjonsområdet som kan ha v arierende form alt etter hvilke koordinatskifte vi bruker. Vi må finne et uttrykk for arealet av disse bitene — iallfall approksimativt. Til dette bruker man den såkalte Jacobi-determinanten:

$$J(u,v) = \begin{matrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{matrix}.$$

Dette gir:

$$\int\int_R f(x,y) dxdy = \int\int_{R'} f(g(u,v), h(u,v)) |J(u,v)| dudv$$