# Løsningsforslag til ekasmen i MAT1010 våren 2004.

## Oppgave 1 a)

Vi har
$$\frac{x-\tan x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\cos x},$$
og siden $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, har vi at
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$
dette er et null-nultedels-uttrykk, og vi bruker l'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x+\cos x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

## Oppgave 1 b)

Uttrykket i oppgaven er et null-nultedels-uttrykk fordi $\cos 9\pi=-1$. Vi bruker L'Hopitals regel:
$$\lim_{x\to 3}\frac{1+\cos 3\pi x+\sin 3\pi x}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-3\pi\sin 3\pi x+3\pi\cos 3\pi x}{1}=3\pi.$$

## Oppgave 2

Vi lar $x$, $y$ og $z$ betegne dimensjonene til metallesken. Da er $V=xyz$ og det gir at $z=\frac{V}{xy}$.

Vekten av esken er
$$f(x,y)=xy+2xz+32yz=xy+\frac{2V}{y}+\frac{32V}{x}.$$

Vi deriverer og finnner for de to partiellderiverete:
$$f_x=y-\frac{32V}{x^2},$$
$$f_y=x-\frac{2V}{y^2}.$$

De stasjonære punktene til $f$ finnes da av ligningene:

$$x^2y = 32V$$

$$xy^2 = 2V,$$

som gir $x = 16y$ og derfor $y = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$. Det følger at $x = 8\sqrt[3]{V}$ og $z = \frac{V}{4\sqrt[3]{V}}$.

### Oppgave 3 a)

$(2+i)(3+i) = 5+5i = 5(1+i)$.

Absoluttverdien er 5 og argumentet er $\pi/4$. Det følger at $(2+i)(3+i) = 5e^{i\pi/4}$.

### Oppgave 3 b)

$$z = 1/2(\sqrt{3} \pm i).$$

Absoluttverdien er 1 og argumentene til de to løsningene er henholdsvis $\pi/6$ og $-\pi/6$.

### Oppgave 4 a)

Likevektspunktet finnes av ligningene

$$\begin{aligned} x - 5y &= \ 1 \\ 5x + y & \ \ 5 \end{aligned}$$

som har løsningene $x = 1$ og $y = 0$. Vi setter $X = x - 1$ og $Y = y$. Ligningssystemet kommer da på formen:

$$\begin{aligned} X' &= X - 5Y \\ Y' &= 5X + Y. \end{aligned}$$

Koeffisientmatrisen er

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

som har egenverdier $1 \pm 5i$.
Det gir løsningene

$$\begin{aligned} X &= e^t(x_0 \cos 5t - y_0 \sin 5t) \\ Y &= e^t(y_0 \cos 5t + x_0 \sin 5t). \end{aligned}$$

Den generelle løsningen av det opprinnelige systemet blir derfor:

$$\begin{aligned} x &= e^t(x_0 \cos 5t - y_0 \sin 5t) + 1 \\ y &= e^t(y_0 \cos 5t + x_0 \sin 5t). \end{aligned}$$

der $x_0$ og $y_0$ er vilkårlige konstanter.

### Oppgave 4 b)

Vi setter inn $t = 0$ i den generelle løsningen og finner følgende ligninger til bestemmelse av $x_0$ og $y_0$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 + 1 = 5 \\ y(0) &= y_0 \qquad = 5 \end{aligned}$$

som gir $x_0 = 4$ og $y_0 = 5$. Løsningen blir:

$$\begin{aligned} x &= e^t(4 \cos 5t - 5 \sin 5t) + 1 \\ y & \quad e^t(5 \cos 5t + 4 \sin 5t). \end{aligned}$$

### Oppgave 5

Vi bruker iterert integrasjon og integrerer først med hensyn på $y$:

$$\begin{aligned} \int\int_R xy(x+1)dxdy = & \quad \textstyle\int_0^1 (\int_0^{1-x} y(x^2+x)dy)dx = \\ \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2(x^2+x)dx = & \quad \textstyle\frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)(x^2+x)dx = \\ \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 - x^3 - x^2 + x)dx = & \quad \textstyle\frac{7}{120}. \end{aligned}$$