MAT 1012

Obligatorisk oppgave 1

Innleveringsfrist: *Torsdag 25. februar 2016, kl. 14.30*

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Oppgaven leveres i obligkassen til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels Hus innen fristen. Oppgaven skal leveres med en egen forside, som du finner på:

http://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-obligforside.pdf

Se forøvrig:

http://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

for nærmere informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt.

Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Oppgave 1

(a) La $f(x) = x^2\sqrt{1+x^2}$. Bestem hvor f vokser og avtar, og finn eventuelle lokale og globale ekstrempunkter.

(b) La $g(x) = x\sqrt{1+x^2}$. Regn ut $\int_0^1 g(x)dx$.

(c) Beregn en tilnærmet verdi av $\int_0^1 g(x)dx$ ved trapes-metoden ved å dele $[0,1]$ inn i 4 like store deler.

(d) Beregn en tilnærmet verdi av $\int_0^1 g(x)dx$ ved Simpsons-metoden ved å dele $[0,1]$ inn i 4 like store deler. Hvilke av metodene i (c) og (d) gir den beste tilnærmingen?

Oppgave 2

La $f(x) = xe^x$

(a) Beregn $f'(x), f''(x), f'''(x)$ of $f^{(4)}(x)$. Finn Taylor polynomet, $T_f(X)$, til f i 0 av orden 4.

(b) Vis at vi kan skrive $f(x) = T_f(x) + E(x)$ der $E(x) = \frac{5+c}{5!}e^c x^5$ der c er et tall mellom 0 og x.

(c) Finn en tilnærmet verdi av $\int_0^1 f(x)dx$ ved å integrere Taylorpolynomet $T_f(x)$ fra (a).

(d) Bruk resultatet fra (b) til å vise at feilen F i tilnærmingen du regnet ut i (c) oppfyller $|F| \leq \frac{e}{120}$ (Du kan her bruke at om g, h er to funksjoner med $0 \leq g(x) \leq h(x)$, $x \in [0,1]$ så er $0 \leq \int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 h(x)dx$).

(e) Regn ut $\int_0^1 f(x)dx$ eksakt. Hvordan stemmer dette med resultatet fra (c) og det du fant i (d) ?

Oppgave 3

(a) Gitt rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+1} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}.$$

Avgjør hvilke av disse rekkene som eventuelt konvergerer eller divergerer.

(b) Betrakt differensiallikningen

$$y' + y = x, \quad y(0) = 1.$$

Finn en tilnærmet løsning for $y(1)$ ved rekkeutvikling. Bruk $n = 6$.

(c) Vi skal nå finne en tilnærmet løsning for $y(1)$ ved å bruke lineær approksimasjon med 100 like delintervaller. Vis at formelen for lineær approksimasjon her gir oss differenslikningen

$$y_{n+1} - 0.99y_n = n\,10^{-4}, \quad y_0 = 1.$$

Løs så denne differenslikningen(ved å bruke metoder fra MAT 10001) og finn y_{100} (som da blir en tilnærmet løsning for $y(1)$).

(d) Finn en løsning av differensiallikningen og regn ut den eksakte verdien av $y(1)$. Hvilke av metodene i (b) og (c) gir den beste tilnærmingen ?

-End-.