MAT 1012

Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: *Torsdag 28. april 2016, kl. 14.30*

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Oppgaven leveres i obligkassen til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels Hus innen fristen. Oppgaven skal leveres med en egen forside, som du finner på:

http://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-obligforside.pdf

Se forøvrig:

http://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

for nærmere informasjon om obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt.

Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Oppgave 1

(a) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være lineær avbildningen

$$T(x, y, z) = (x + y, x - y + z).$$

Finn standardmatrisen til T.

(b) Finn en basis for nullrommet til T.

(c) La $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være lineær avbildningen

$$S(x, y, z) = x - y - 2z.$$

Finn en basis for nullrommet til S og vis at hvis $\mathbf{u} \in \operatorname{Nul} T$ og $\mathbf{v} \in \operatorname{Nul} S$ så har vi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

(d) Finn en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ for $\mathbb{R}^3$ slik at $\mathbf{u}_1$ er en basis for $\operatorname{Nul} T$ og $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en basis for $\operatorname{Nul} S$. (Hint. Du kan her bruke at om $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er to vektorer med $\mathbf{u} \neq 0$, og $\mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ er projeksjonen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}$ så vil $\mathbf{v} - \mathrm{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ stå normalt på $\mathbf{u}$.)

e) La $M = [\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2\, \mathbf{u}_3]$ (3×3-matrisen med kolonner $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$). Finn M^{-1}.

Oppgave 2

(a) La $\mathbf{F}(x, y) = (y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2})$, $x > 0$, $y > 0$. Vis at $\mathbf{F}$ er konservativt og finn f slik at $\nabla f = \mathbf{F}$.

(b) Finn de kritiske punktene til f og bestem deres type.

(c) La $\mathbf{G}(x, y) = (2y, 3x^2)$. Finn sirkulasjonen til $\mathbf{G}$.

(d) Vis at kurven $\mathcal{C}$ gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3), t > 0$ er en integralkurve til $\mathbf{G}$

(e) Regn ut kurveintegralet av $\mathbf{G}$ langs $\mathcal{C}$ for $t \in [0, 1]$ $\mathbf{G}$ langs $\mathcal{C}$ for $t \in [0, 1]$.

(f) La $\mathbf{H} = \mathbf{G}(x,y)^{\perp} = (-3x^2, 2y)$. Hva blir kurveintegralet av $\mathbf{H}$ langs $\mathcal{C}$ for $t \in [0,1]$?

-End-.