Løsningsforslag, MAT 1012, Oblig 1 - 2016

Oppgave 1

(a) $f(x) = x^2\sqrt{1+x^2}$, $f'(x) = 2x\sqrt{1+x^2} + x^2 \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} =$

$$= \frac{2x(1+x^2)+x^3}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{x(2+3x^2)}{(1+x^2)^{1/2}}$$

Vi ser at $(2+3x^2)>0$ for alle og $(1+x^2)^{1/2}>0$ for alle x så $f'(x)<0$ når $x<0$ og $f'(x)>0$ når $x>0$.
f ~~vokser~~ avtar derfor på $(-\infty,0]$ og vokser på $[0,\infty)$ og må ha et globalt minimumspunkt for $x=0$, $f(0)=0$.
(Det er opplagt å se at $f(x)>0$ når $x\neq 0$, $f(0)=0$ så utifra dette er det opplagt at $x=0$ er et globalt min pkt.)

(b) $$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^2 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du =$$

$u = 1+x^2$, $x=0 \Rightarrow u=1$
$du = 2x\,dx$, $x=1 \Rightarrow u=2$

$$= \left[\tfrac{1}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}}$$

(c) Deler vi inn $[0,1]$ i 4-like deler får vi $a_0=0, a_1=\frac{1}{4}, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{3}{4}, a_4=1$, $\Delta x=\frac{1}{4}$

og trapesmetoden gir oss

$$\int_0^1 g(x)dx \approx \left(\frac{g(0)}{2}+g(\tfrac{1}{4})+g(\tfrac{1}{2})+g(\tfrac{3}{4})+\tfrac{1}{2}g(1)\right)\frac{1}{4}$$

$$=\left(0+\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{17}{16}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}}+\tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{25}{16}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\frac{1}{4}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{15}{16}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{4}\approx 0.615329$$

(d)

Simpson's metode gir oss nå

$$\int_0^1 g(x)dx \approx \left(g(0)+4g(\tfrac{1}{4})+2g(\tfrac{1}{2})+4g(\tfrac{3}{4})+g(1)\right)\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$$

$$=\cancel{\left(4\sqrt{\tfrac{17}{16}}+2\sqrt{\tfrac{5}{4}}+4\right)}$$

$$=\left(\sqrt{\tfrac{17}{16}}+\sqrt{\tfrac{5}{4}}+3\sqrt{\tfrac{25}{16}}+\sqrt{2}\right)\frac{1}{12}$$

$$=\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{17}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}+\tfrac{15}{4}+\sqrt{2}\right)\frac{1}{12}\approx 0.609419$$

Fra (b) hadde vi $\int_0^1 s(x)dx=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\approx 0.609476$

så vi ser her at Simpsons metode i (c) gir den beste tilnærmingen.

Oppgave 2

$$f(x) = xe^x$$

(a) $f'(x) = e^x + xe^x$, $\quad f''(x) = e^x + f'(x) = e^x + e^x + xe^x = \cancel{2}$
$= 2e^x + xe^x$

$f'''(x) = 2e^x + f'(x) = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$
$f^{(4)}(x) = 3e^x + f'(x) = 3e^x + e^x + xe^x = 4e^x + xe^x$

Vi får $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 3$, $f^{(4)}(0) = 4$

og $T_f(x) = x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}$

(b) Skriver vi
$$f(x) = T_f(x) + E(x)$$
har vi fra restleddsformelen $E(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} x^5$
der c ligger mellom 0 og x.
Fra regningene i (a) har vi
$f^{(5)}(x) = 4e^x + f'(x) = 4e^x + e^x + xe^x = 5e^x + xe^x =$
$= (5+x)e^x$

så $f^{(5)}(c) = (5+c)e^c$ og innsatt i uttrykket for $E(x)$
får vi $E(x) = \frac{(5+c)e^c}{5!} x^5$

(c) Vi har

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 T_f(x)dx = \int_0^1 \left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{30}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{30}\right) = \frac{119}{120} \approx 0.991667$$

(d)

Vi har $F = \int_0^1 xe^x - \int_0^1 T_f(x)dx = \int_0^1 E(x)dx$

Og siden $E(x) = \frac{5+c}{5!} e^c x^5$ der c ligger mellom $[0,1]$

har vi $(5+c)e^c < 6e^1 = 6e$

dvs. $0 \leq E(x) = \frac{6e\, x^5}{5!}$

så $0 \leq \int_0^1 E(x)dx \leq \int_0^1 \frac{6e\,x^5}{5!} dx = \left[\frac{e\,x^6}{5!}\right]_0^1 = \frac{e}{5!} = \underline{\frac{e}{120}}$

dvs $|F| = F = \int_0^1 E(x)dx < \underline{\underline{\frac{e}{120}}}$ ~~≈ 0.022652~~

(e) Vi bruker delvis integrasjon

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = e^0 = \underline{1}$$

$u = x,\ v' = e^x$

$u' = 1 \quad v = e^x$

Så feilen $F(x) = 1 - \frac{119}{120} = \frac{1}{120} < \underline{\frac{e}{120}} \approx \underline{\frac{2.7}{120}}$

Oppgave 3

(a) ~~Vi~~ Vi vet at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent

Videre har vi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big/ \frac{1}{n+\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}+1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = 1$ (siden $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ og $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$)

så ved Teorem 3.6.2 vil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$ divergere

La $a_n = ne^{-n}$ da er

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{n\,e^{-n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{e^n}{e^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{e} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e}.$$

Siden $\frac{1}{e} < 1$ vil rekka $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ konvergere

ved Teorem 3.6.3.

(b) Vi ~~har at~~ setter $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Diff likningen gir oss da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x$$

Dette gir oss

$$a_0 + a_1 = 0$$
$$a_1 + 2a_2 = 1$$
$$a_2 + 3a_3 = 0$$
$$a_3 + 4a_4 = 0$$
$$a_4 + 5a_5 = 0$$
$$a_5 + 6a_6 = 0$$

Siden $a_0 = f(0) = 1$ får vi da

$a_1 = -a_0 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_1) = 1$, $a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}$
$a_4 = -\frac{1}{4}a_3 = \frac{1}{12}$, $a_5 = -\frac{1}{5}a_4 = \frac{-1}{60}$, $a_6 = -\frac{1}{6}a_5 = \frac{1}{360}$.

Så en tilnærming av $y(x)$ blir

$$1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{360}x^6 = p(x)$$

og $p(1) = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{60} + \frac{1}{360} = \frac{265}{360} \approx 0.736111$

blir en tilnærmet verdi for $y(1)$

(c) Vi har $y' = -y + x$

Så formelen $y_{n+1} = y_n + y'(x_n)\Delta x$ gir oss

$$y_{n+1} = y_n + (-y_n + x_n)\Delta x$$

Her er $x_n = n\frac{1}{100} = n \cdot 10^{-2}$ og $\Delta x = \frac{1}{100} = 10^{-2}$

så $y_{n+1} = y_n + (-y_n + n\,10^{-2}) \cdot 10^{-2} = 0.99y_n + n \cdot 10^{-4}$

Dvs. $y_{n+1} - 0.99y_n = n \cdot 10^{-4}$, $y_0 = y(0) = 1$

Vi finner først den generelle løsningen av $y_{n+1} - 0.99 y_n = n \cdot 10^{-4}$

Vi søker en spesiell løsning på formen $y = An + B$.

$$(A(n+1)+B) - 0.99(An+B) = n \cdot 10^{-4}$$
$$0.01An + (A + 0.01B) = n \cdot 10^{-4}$$

så $0.01A = 10^{-4}$, $A = 10^{-2} = 0.01$

$A + 0.01B = 0.01 + 0.01B = 0$, $B = -1$

så $y_n = 0.01n - 1$ en spesiell løsning.

Generell løsning av den homogene likningen er $y_n = C \cdot (0.99)^n$, dvs $y_n = C \cdot (0.99)^n + 0.01n - 1$ blir generell løsning. Vi skal ha $y_0 = C - 1 = 1$ dette gir $C = 2$, og løsning.

$$y_n = 2 \cdot (0.99)^n + 0.01n - 1$$

$$y_{100} = 2 \cdot (0.99)^{100} + 1 - 1 = 2 \cdot (0.99)^{100} \approx 0.732065$$

d) Vi husker at når $y' + f(x)y = g(x)$

så har vi $y = e^{-F(x)}\left(\int g(x) e^{F(x)} dx\right)$

der $F(x) = \int f(x)dx$. Her har vi $f(x) = 1$, $g(x) = x$

så $F(x) = \int dx = x$, $\int g(x) e^{F(x)} dx = \int x e^x dx$

Dette integralet regnet vi ut i oppgave 2 og vi får $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

så $y(x) = e^{-x}(xe^x - e^x + C)$

$= x - 1 + Ce^{-x}$.

Vi har $y(0) = -1 + C = 1$, så $C = 2$

og $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$

$y(1) = 1 - 1 + 2e^{-1} = 2/e \approx 0{,}735759$

og vi ser at rekkeutviklingsmetoden har gitt den beste tilnærmingen.