Løsning av oblig2; MAT 1012, Vår 2016

a) La $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$

Vi ser at

$$T(\vec{e}_1)=(1,1),\ T(\vec{e}_2)=(1,-1),\ T(\vec{e}_3)=(0,1)$$

Det følger at standardmatrisen til T er matrisen:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

b) Hvis $(x,y,z)\in \mathrm{Nul}\,T$ må vi ha

$$\begin{matrix} ① & x+y=0\\ ② & x-y+z=0\end{matrix}\Bigg\}$$

Sett $y=t$. Av ① får vi $x=-y=-t$. Innsatt i ② får vi

$$z=y-x=t-(-t)=2t.$$

Dvs. $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t\\t\\2t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ og vi ser at

$\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ blir en basis for $\mathrm{Nul}\,T$

c) La $(x,y,z)\in \mathrm{Nul}\,S$. Da har vi

$$x-y-2z=0$$

Setter vi $y=s$ og $z=u$ får vi nå $x=y+2z=s+2u$ og

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2u\\s\\u\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

Dette viser at $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ utspenner Nul S.

Det er også klart at om $a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+2b\\a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

så må $a = b = 0$, så de to vektorene over er lineært uavhengige.
Tilsammen får vi da at

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \text{ er en basis for Nul } S$$

La $\vec{u} = \begin{bmatrix}-t\\t\\2t\end{bmatrix} \in \text{Nul } T$ og

$\vec{v} = \begin{bmatrix}s+2u\\s\\u\end{bmatrix} \in \text{Nul } S$. Da har vi

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-t)(s+2u) + ts + u(2t) =$$

$$= -ts - 2tu + ts + 2tu = 0,$$ som var det vi skulle vise

$\boxed{\text{D}}$.

d) Sett $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ og $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ og la $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$

Projeksjonen av $\vec{v}_3$ langs $\vec{v}_2$ er gitt ved

$$\text{Pr}_{\vec{v}_2}(\vec{v}_3) = \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\cdot\vec{v}_2 = \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Vi vet da at

$$\vec{v}_3 - \mathrm{pr}_{\vec{v}_2}(\vec{v}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

må stå ortogonalt på $\vec{v}_2$. Det er klart at

$$\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathrm{Nul}\, S.$$

Sett nå $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big/ \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Det er da klart at

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ blir en ortonormal basis for Nul S. Siden enhver vektor i Nul T står ortogonalt på enhver vektor i Nul S, vil nå

$$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|}, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ bli en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ med egenskapene som vi søker

e) Vi har

$$M = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

fra d) følger at M har ortonormale kolonner. Da følger det at M er en ortogonal matrise dvs.

$$M^{-1} = M^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

(a) $\vec{F}(x,y) = \left(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}\right) = (p(x,y), q(x,y))$

Vi har at $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

og $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{1}{y^2}\right) = 1$

dvs. $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. La oss forsøke å finne f slik at $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

Vi må ha $\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2}$ dvs. $f(x,y) = \int\left(y - \frac{1}{x^2}\right)dx =$

$= yx + \frac{1}{x} + g(y)$, og videre

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx + \frac{1}{x} + g(y)\right) = x + g'(y) = x - \frac{1}{y^2}$$

Vi ser at da må vi ha $g'(y) = -\frac{1}{y^2}$ så

$$\int g'(y)\,dy = \int -\frac{1}{y^2}\,dy = \frac{1}{y} + K.$$

Setter vi $K = 0$ blir
$f(x,y) = yx + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ et potensial for $\vec{F}$
og vi har samtidig vist at $\vec{F}$ er et konservativt vektorfelt.

(b) For å finne kritiske punkter for f må vi løse

① $\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2} = 0$

② $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2} = 0$

① $\Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$. Innsatt i ② får vi

$$x - \frac{1}{(1/x^2)^2} = x - x^4 = 0 = x(1 - x^3) = 0$$

Her må $x = 0$ eller $x^3 = 1$, $x = 1$
men vi har at $x, y > 0$ så vi får $x = 1$.
~~Siden~~ $y = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1} = 1.$

Så $(1,1)$ blir eneste kritiske punkt for f

Vi har videre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{2}{y^3}$$

For $(x,y) = (1,1)$ får vi Hessedeterminanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0$, ser vi at $(1,1)$ blir et lokalt minimumspunkt.

(c) $G(x,y) = (2y, 3x^2)$

Sirkulasjonen er gitt som

$$\operatorname{curl} G = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2y) = \underline{\underline{6x - 2}}$$

(d) La $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$, $t > 0$

Vi har da $\vec{r}\,'(t) = (2t, 3t^2)$

og $G(\vec{r}(t)) = (\cancel{2t^2, 3t^6}\;(2t^3, 3(t^4))$

$$= t^2(2t, 3t^2) = t^2\,\vec{r}\,'(t).$$

Så $G(\vec{r}(t))$ og tangentvektoren $\vec{r}\,'(t)$ er parallelle. Dette viser at $\vec{r}(t)$ er en integralkurve til $\vec{G}$.

(e) Kurveintegralet er gitt ved

$$\int_0^1 G(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (2t^3, 3t^4) \cdot (2t, 3t^2)\,dt = \int_0^1 (4t^4 + 9t^6)\,dt$$

$$= \left[\frac{4}{5}t^5 + \frac{9}{7}t^7\right]_0^1 = \frac{4}{5} + \frac{9}{7} = \frac{28+45}{35} = \underline{\underline{\frac{73}{35}}}$$

(f) Vi har sett at $G(r(t))$ er parallell med $\vec{r}\,'(t)$. Siden H og G er ortogonal må H også være ortogonal til $\vec{r}\,'(t)$

dvs.

$$H(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$$

Vi må derfor ha $\int_0^1 H(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$

dvs

$$\underline{\underline{\int_C H \cdot T_C \, ds = 0}}$$