n-te røtter av komplekse tall

MAT1100

29. august 2011

Eksponentialform

Forrige gang så vi at

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

- Dette kan vi bruke til å gjøre polarfremstillingen av komplekse tall mer kompakt:

  $$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

  Uttrykket $z = re^{i\theta}$ kalles også *eksponentialformen* til z.
- Eksponentialformen er spesielt hensiktsmessig når vi skal opphøye et komplekst tall i en (heltallig) potens:

  $$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\left(e^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

- Legg merke til hvordan denne formelen gjenspeiler grunnregelen for kompleks multiplikasjon: Vi *multipliserer* modulusene og *adderer* argumentene.

n-te røtter

Vi skal nå se på den motsatte problemstillingen, nemlig hvordan man finner n-te røtter til komplekse tall

- **Definisjon:** Dersom z og w er komplekse tall, sier vi at w er en n-te rot av z dersom $w^n = z$ (n er et naturlig tall, $n = 1, 2, 3 \ldots$).
- **Eksempel:** i er en kvadratrot ("2-rot") av -1 siden $i^2 = -1$. Men $-i$ er også en kvadratrot av -1 siden $(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.
- Det viser seg at alle komplekse tall (bortsett fra 0) har nøyaktig n n-te røtter.

Kunsten å finne en n-te rot

Anta at z er et gitt komplekst tall. Hvilken betingelser må et annet komplekst tall w oppfylle for å være en n-te rot av z?

- Ifølge definisjonen må $w^n = z$. Men hva betyr dette?
- La oss skrive w på eksponentialform: $w = \rho e^{i\phi}$. Da er

$$w^n = \rho^n e^{in\theta}$$

- Hvis eksponentialformen til z er $z = re^{i\theta}$, trenger vi altså

$$re^{i\theta} = \rho^n e^{in\phi} \qquad (z = w^n)$$

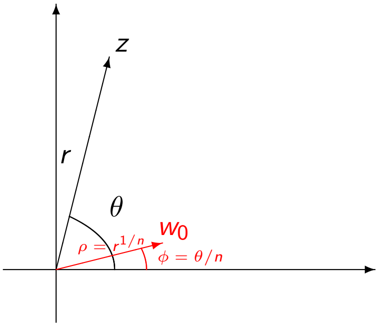
- Denne ligningen har en enkel løsning: $r = \rho^n$, $\theta = n\phi$, eller med andre ord

$$\rho = r^{1/n} = \sqrt[n]{r} \quad \text{and} \quad \phi = \frac{\theta}{n}$$

Vi har dermed funnet én n-te rot til $z = re^{i\theta}$, nemlig

$$w_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$$

Geometrisk:



Men hvor kommer de andre n-te røttene fra?

Kunsten å finne flere n-te røtter

La oss gå tilbake til den grunnleggende ligningen $z = w^n$, dvs. til

$$re^{i\theta} = \rho^n e^{in\phi}$$

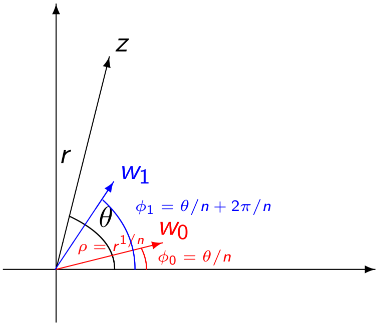
- Siden $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ er periodisk med periode 2π, får vi også en løsning ved å velge

$$\rho^n = r \quad \text{og} \quad n\phi = \theta + 2\pi$$

- dvs:

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{og} \quad \phi = \theta/n + 2\pi/n$$

Geometrisk:



Når vi ganger w_1 med seg selv flere og flere ganger $(w_1, w_1^2, w_1^3, \ldots)$, går den i spiral én gang rundt origo og ender i z når vi er kommet til w_1^n.

Kunsten å finne enda flere n-te røtter

Vi går igjen tilbake til den grunnleggende ligningen $z = w^n$, dvs. til

$$re^{i\theta} = \rho^n e^{in\phi}$$

- Siden $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ er periodisk med periode 2π, får vi også en løsning ved å velge

$$\rho^n = r \quad \text{og} \quad n\phi = \theta + 4\pi$$

- dvs:

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{og} \quad \phi = \theta/n + 4\pi/n$$

- Dermed har vi vår tredje løsning

$$w_2 = r^{1/n} e^{i\theta/n + 4i\pi/n}$$

Kunsten å finne enda flere n-te røtter

Vi kan fortsette på denne måten for alle multipla av 2π. Den grunnleggende ligningen

$$re^{i\theta} = \rho^n e^{in\phi}$$

har løsningen

$$\rho^n = r \quad \text{og} \quad n\phi = \theta + 2k\pi$$

dvs.

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{og} \quad \phi = \theta/n + 2k\pi/n$$

for alle heltallige k.

- Tilsynelatende har vi dermed uendelig mange løsninger

$$w_k = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2ki\pi/n}$$

for $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$!

Kunsten å finne enda flere n-te røtter

Heldigvis viser det seg at bare n av disse røttene er ulike. Etter

$$w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$$

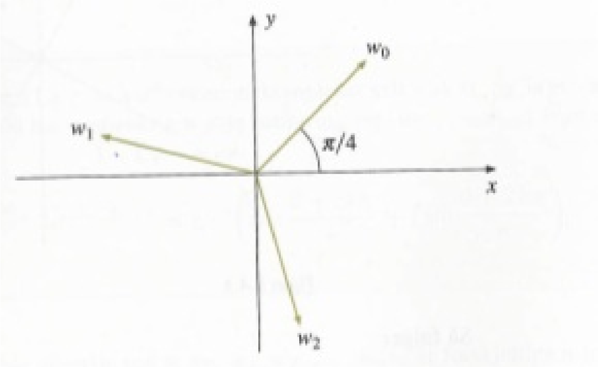
begynner vi på nytt med w_0.

- Grunnen er lett å se:

$$w_n = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2ni\pi/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2i\pi} = r^{1/n} e^{i\theta/n} = w_0$$

Sammenhengen mellom n-te røttene

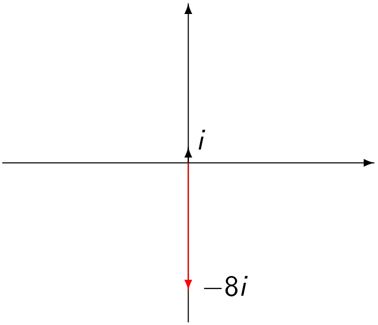
De n n-te røttene til z er like lange (har samme modulus) og deler planet inn i n like store sektorer (vinkelen mellom røtter som ligger ved siden av hverandre er alltid $2\pi/n$



Et eksempel

Vi skal finne tredjerøttene til $z = -8i$

- Det første vi må gjøre, er å skrive z på polarform. Siden z egentlig er vektoren $(0, -8)$, er det lett å se at $r = 8$ og $\theta = \frac{3\pi}{2}$.



Et eksempel

Vi har altså $z = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Siden $\sqrt[3]{8} = 2$ og $\frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{2}$, er dermed tredjerøttene gitt ved

$$w_0 = r^{1/3}e^{i\theta/3} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$w_1 = r^{1/3}e^{i\theta/3+2i\pi/3} = 2e^{i\pi/2+2i\pi/3} = 2e^{7i\pi/6}$$

$$w_2 = r^{1/3}e^{i\theta/3+4i\pi/3} = 2e^{i\pi/2+4i\pi/3} = 2e^{11i\pi/6}$$

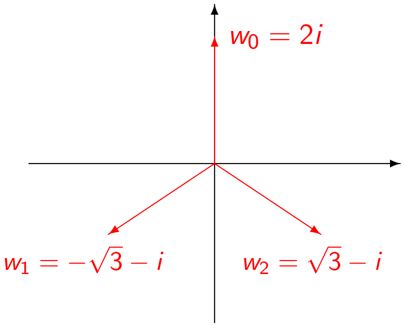
Et eksempel

Disse uttrykkene kan forenkles:

- $$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$$
- Siden $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$, er
$$w_1 = 2e^{7i\pi/6} = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} - i$$
- og siden $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, er
$$w_2 = 2e^{11i\pi/6} = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - i$$

Et eksempel

Det geometriske bildet:



To måter å regne ut røttene på: Metode 1

Vi har:

$$w_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$$

$$w_1 = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2i\pi/n}$$

$$w_2 = r^{1/n} e^{i\theta/n + 4i\pi/n}$$

$$\vdots$$

$$w_k = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2ki\pi/n}$$

$$\vdots$$

og kan regne ut

$$w_k = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2ki\pi/n} = r^{1/n} \left(\cos\left(\theta/n + 2k\pi/n\right) + i \sin\left(\theta/n + 2k\pi/n\right)\right)$$

for hver $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Denne metoden er grei når det er lett å finne cosinusene og sinusene som inngår.

To måter å regne ut røttene på: Metode 2

Vi har:

$$w_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}$$

$$w_1 = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2i\pi/n} = w_0 e^{2\pi i/n}$$

$$w_2 = r^{1/n} e^{i\theta/n + 4i\pi/n} = w_1 e^{2\pi i/n}$$

$$\vdots$$

$$w_k = r^{1/n} e^{i\theta/n + 2ki\pi/n} = w_{k-1} e^{2\pi i/n}$$

$$\vdots$$

Vi skriver w_0 og $e^{2\pi i/n}$ på kartesisk form (dvs. på formen $a + ib$) og finner de neste røttene ved gjentatt multiplikasjon. Denne metoden egner seg best når $e^{2\pi i/n}$ har en enkel form.

Et eksempel til

Vi skal finne fjerderøttene til $z = -8 + 8i\sqrt{3}$

- Vi skriver z på polarform:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2 + 8^2 \cdot 3} = \sqrt{8^2 \cdot 4} = 16$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

  Siden z ligger i annen kvadrant, betyr dette at $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

- Vi har altså $z = 16e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Et eksempel til

Siden $z = 16e^{\frac{2i\pi}{3}}$, er

$$w_0 = \sqrt[4]{16}e^{\frac{2i\pi/3}{4}} = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

- For å finne en rot fra den foregående, må vi gange med

$$e^{\frac{2i\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

- Dermed er

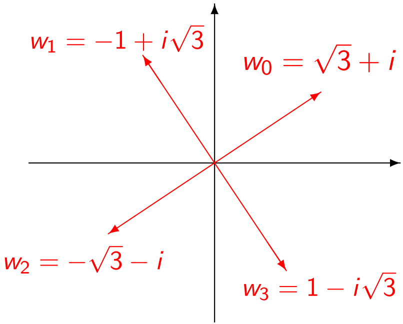
$$w_1 = w_0 i = (\sqrt{3} + i)i = -1 + i\sqrt{3}$$

$$w_2 = w_1 i = (-1 + i\sqrt{3})i = -\sqrt{3} - i$$

$$w_3 = w_2 i = (-\sqrt{3}ii)i = 1 - i\sqrt{3}$$

Et eksempel

Det geometriske bildet:



Komplekse annengradsligninger

Formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

for løsninger av annengradsligninger

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gjelder også i det komplekse tilfellet dersom vi tolker kvadratrottegnet riktig (det finnes ikke noen standardtolkning av $\sqrt{z}$ når z er et komplekst tall).

Komplekse annengradsligninger

Dersom a, b, c er komplekse tall, har annengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0$$

løsningene

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

der vi rett og slett tolker $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ til å være de to (komplekse) kvadratrøttene til $b^2 - 4ac$.

Eksempel

Vi skal løse

$$z^2 + (3+i)z + 2 = 0$$

Løsningene er

$$z = \frac{-(3+i) \pm \sqrt{(3+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} =$$

$$= \frac{-(3+i) \pm \sqrt{9 + 6i - 1 - 8}}{2} = \frac{-(3+i) \pm \sqrt{6i}}{2}$$

der $\pm\sqrt{6i}$ skal tolkes som de to kvadratrøttene til $6i$. For å komme videre må vi finne disse kvadratrøttene.

Eksempel

- $6i$ har modulus $r = 6$ og argument $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Den ene kvadratroten er dermed

$$w_0 = \sqrt{6}e^{i\pi/4} = \sqrt{6}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) =$$

$$= \sqrt{6}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{12}}{2} + i\frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$$

- Den andre er $w_1 = -w_0 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Eksempel

Løsningene av annengradsligningen er dermed

$$\frac{-(3+i)\pm\sqrt{6i}}{2}=\frac{-(3+i)\pm(\sqrt{3}+i\sqrt{3})}{2}=$$

$$=\begin{cases}\frac{-3+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}\\ \\ \frac{-3-\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+1)}{2}\end{cases}$$