Algebraens fundamentalteorem

"Egentlig" handler dette om n-te gradsligningen

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$$

der $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0$ er komplekse tall

Eks: $iz^4 + 2z^3 + (1-i)z + 2i = 0$ fjerdegradsligning

Teorien er enklere å beskrive hvis vi istedenfor tenker på faktorisering av n-te grads polynomer:

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

Sammenheng: Et n-te grads polynom $P(z)$ er delelig med $z-a$ hvis og bare hvis $P(a)=0$.

Det betyr at hvis $P(a)=0$, så er

$$P(z) = (z-a)P_{n-1}(z)$$ der $P_{n-1}(z)$ er et polynom av grad $n-1$.

Setning: Ethvert komplekst polynom $P(z)$ har en kompleks rot r, dvs et komplekst slik at $P(r) = 0$.

Dette resultatet kan vi bruke til å vise litt:

$$P(z) = (z-r_1)P_{n-1}(z)$$ roten til $P(z)$

Ifølge setningen må $P_{n-1}(z)$ ha en rot r_2, dvs $P_{n-1}(z) = (z-r_2)P_{n-2}(z)$

Dermed

$$P(z) = (z-r_1)(z-r_2)P_{n-2}(z)$$

Fortsetter vi på denne måten, får vi

$$P(z) = (z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)P_0(z)$$ konstant c_n

dvs

$$P(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)$$ $P(z)$ har n røtter.

n røtter, men de behøver ikke være forskjellige

Eksempel: $z^2+2z+1 = (z+1)^2 = (z-(-1))^2$

Det generelle tilfælde.

$$p(z) = c_n (z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)$$

$$= c_n (z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2}\cdots(z-r_k)^{m_k}$$

multipliciteter: $m_1+m_2+\dots+m_k = n$

Terminologi: r_1 er en rod med multiplicitet m_1 osv.

Sætning: Et n-te grads polynom har altid n komplekse rødder talt med multiplicitet.

Offisiell versjon:

Algebraens fundamentalteorem: Dersom $P(z)$ er et komplekst n-te grads polynom, finnes det n komplekse tall $r_1, r_2, \ldots, r_n$ (ikke nødvendigvis forskjellige) slik at

$$P(z) = c_n (z-r_1)(z-r_2) \ldots (z-r_n)$$

Denne fremstillingen er entydig.

Hva med det reelle tilfellet? Hvis vi har et reelt polynom

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \quad , c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}$$

og ønsker å faktorisere i reelle faktorer, hva kan vi da få til?

Eksempel: $P(z) = z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$

reelt — komplekse

Lemma: Dersom $P(z)$ er et reelt polynom med en kompleks rot r, så er også $\bar{r}$ en rot i $P(z)$.

Bevis: Vet $0 = P(r)$: Konjugerer

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

$$0 = \bar{0} = \overline{P(r)} = \overline{c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_1 r + c_0}$$

$$= \overline{c_n r^n} + \overline{c_{n-1} r^{n-1}} + \cdots + \overline{c_1 r} + \overline{c_0} =$$

$$= \overline{c_n}\,\bar{r}^n + \overline{c_{n-1}}\,\bar{r}^{n-1} + \cdots + \overline{c_1}\,\bar{r} + \overline{c_0} =$$

$$= c_n \bar{r}^n + c_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \cdots + c_1 \bar{r} + c_0 = P(\bar{r})$$

$\overline{c_n r^n}$

Reelt polynom:
$\overline{c_n} = c_n$
$\overline{c_{n-1}} = c_{n-1}$
$\vdots$

Hurra! $\bar{r}$ er rot i polynomet.

Slagord: I et reelt polynom kommer de komplekse røttene i konjugerte par $r, \bar{r}$ (og de har samme multiplisitet).

Komplekse røtter kommer i konjugerte par (OBS bare i reelle polynomer).

$$P(z) = c_n \underbrace{(z-r_1)(z-r_2)\ldots(z-r_k)}_{\text{reelle røtter}} \underbrace{(z-k_1)(z-\bar{k}_1)(z-k_2)(z-\bar{k}_2)}_{\text{komplekse røtter i konjugerte par}} \ldots$$

Ganger vi sammen de "konjugerte faktorene" får vi reelle uttrykk:

$$(z-k_1)(z-\bar{k}_1) = (z-\underbrace{(a_1+ib_1)}_{k_1})(z-(a_1-ib_1)) = (z-a_1-ib_1)(z-a_1+ib_1)$$

$$= ((z-a_1)-ib_1)((z-a_1)+ib_1) = (z-a_1)^2-(ib_1)^2$$

$$= \underbrace{z^2-2a_1z+a_1^2+b_1^2}_{\text{reell annengradsfaktor.}}$$

Dermed får vi

$$P(z) = c_n(z-r_1)(z-r_2)\ldots(z-r_k)(z^2-2a_1z+a_1^2+b_1^2)(z^2-2a_2z+a_2^2+b_2^2)\ldots$$

Konklusjon: Ethvert reelt n-te grads polynom kan skrives som et produkt av reelle første og annengradspolynomer.

Eksempel: Ved innsetting kan man vise at

$z = 1-2i$ er en rot i

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 3z + 20$$

Finn de andre røttene!

Siden polynomet er reelt, vil vi at den konjugerte $\overline{z} = \overline{1-2i} = 1+2i$ også er en rot.

Siden $1-2i$ og $1+2i$ er røtter i $P(z)$, så er $P(z)$ delelig med $z-(1-2i)$ og $z-(1+2i)$. $P(z)$ vil da også være delelig med produktet

$$(z-(1-2i))(z-(1+2i)) = ((z-1)+2i)((z-1)-2i)$$
$$= (z-1)^2 - (2i)^2 = z^2 - 2z + 1 + 4 = \underline{z^2 - 2z + 5}$$

Deler

$$
\begin{array}{l}
z^3 + 2z^2 - 3z + 20 : z^2 - 2z + 5 = z + 4 \\
-\underline{(z^3 - 2z^2 + 5z)} \\
\quad 4z^2 - 8z + 20 \\
\quad -\underline{(4z^2 - 8z + 20)} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

Det betyr: $P(z) = (z+4)(z^2 - 2z + 5)$ reell faktorisering

$= (z+4)(z-(1-2i))(z-(1+2i))$ ← kompleks faktorisering

Eksempel: Vis at $(1+i)$ er en rot i

$$P(z) = z^3 - iz^2 - iz - 1 - i$$

og finn de andre røttene.

Lösning: $P(1+i) = (1+i)^3 - i(1+i)^2 - i(1+i) - 1 - i = \ldots\ldots = 0$

OBS: Polynomet er ikke reelt, så $1-i$ er ikke (nödvendigvis) en rot.

Deler

$$
\begin{array}{l}
z^3 - iz^2 - iz - 1 - i : z - (1+i) = z^2 + z + 1 \\
-\left(z^3 - (1+i)z^2\right) \\
\hline
z^2 - iz - 1 - i \\
-\left(z^2 - (1+i)z\right) \\
\hline
z - 1 - i \\
-\left(z - (1+i)\right) \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$-\cancel{iz^2}$$
$$+z^2 + \cancel{iz^2}$$

$$-\cancel{iz}$$
$$+z + \cancel{iz}$$

Dermed: $P(z) = (z-(1+i))\overbrace{(z^2+z+1)}^{\text{faktoriser}}$

Löser: $z^2+z+1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$P(z) = (z-(1+i))\left(z - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

Rötter: $1+i$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.