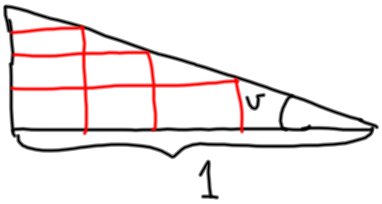
Uoppstilte oppgaver:

a) Maks-min-oppgaver

b) Koblede hastigheter

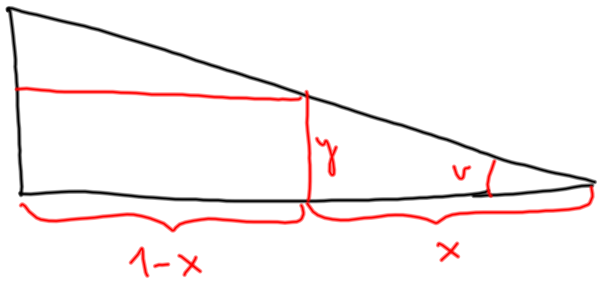
Eksempel:



Hvilken rektangulær boks har størst areal?

$\frac{y}{x} = \tan v$

$y = \tan v \; x$

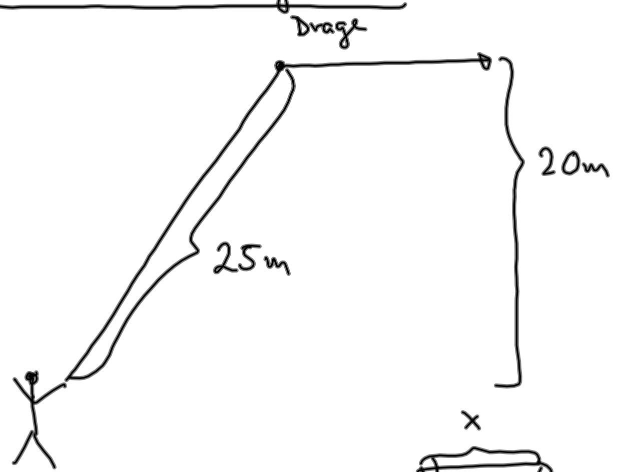


$A(x) = (1-x)\tan v \, x = \tan v \,(x - x^2)$

$A'(x) = \tan v\,(1-2x)$, $x = \frac{1}{2}$ gir $A'(x) = 0$.

Maks: for $x = \frac{1}{2}$.

Koblede hastigheter:



Snoren løper ut med en fart på 2 m/s.
Hva fort flyr dragen når det er 25 m snor ute?

Generell situasjon:

y' er kjent: 2 m/s

x' er farten til dragen (skal finnes)

Finner en sammenheng mellom de opprinnelige størrelsene x og y.

Pytagoras: $y^2 = x^2 + 20^2 = x^2 + 400 \Rightarrow x^2 = y^2 - 400$

Deriverer mhp t: $\cancel{2}yy' = \cancel{2}xx' \cancel{+0}$

$$x' = \frac{y}{x}y'$$

I vårt øyeblikk er $y = 25$, $y' = 2$, $x^2 = 25^2 - 400 = 625 - 400 = 225$
$x = 15$

$$x' = \frac{25}{15} \cdot 2 = \frac{10}{3} \text{ m/s}.$$

Integrasjon

Analysens fundamentalteorem (folkeversjonen, litt Harry)

(i) Dersom F er en antiderivert til f

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(ii) Hvis $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, så $F'(x) = f(x)$.

Eksempel: La $G(x) = \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t}\,dt$. Finn $G'(x)$.

Hvis $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, så er $F'(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Men $F(x^3) = \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t}\,dt = G(x)$, så ved kjerneregelen:

$$G'(x) = (F(x^3))' = \frac{\sin x^3}{\cancel{x^3}}\, 3x^{\cancel{2}} = \frac{3\sin x^3}{x}$$

Standard anvendelser:

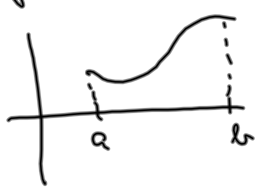
Areal: $A = \int_a^b f(x)\,dx$

forutsetning $f \geq 0$

Omdreiningslegemer: om x-aksen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

om y-aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

Buelengde: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$



Andre anvendelser:

$$\underbrace{\sum f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})}_{\text{Riemann-summer}} \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

Integrasjonsteknikker

Delvis integrasjon: $\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$

typiske anvendelser: $u = \ln x$, $u = \arctan x$, $u = x^n$

Substitusjon: **Grunnform:** $\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(u) \, du$

$u = g(x)$
$du = g'(x) dx$

Avansert form: $\int f(g(x)) \, dx = \int f(u) h'(u) \, du$

$u = g(x)$
$x = h(u)$
$dx = h'(u) du$

Delbrøkoppspalting: Mye slit, men med oppskrift.

Eksempel: $I = \int e^{\arcsin x} dx$

$u = \arcsin x$
$x = \sin u$
$dx = \cos u \, du$

$= \int e^u \cos u \, du$ $\;\; I$

$U = e^u$	$V' = \cos u$
$U' = e^u$	$V = \sin u$
$U = e^u$	$V' = \sin u$
$U' = e^u$	$V = -\cos u$

$= e^u \sin u - \int e^u \sin u \, du$

$= e^u \sin u - \left(-e^u \cos u + \int e^u \cos u \, du\right)$

$= e^u \sin u + e^u \cos u - \int e^u \cos u \, du$ $\;\; I$

dvs

$I = e^u \sin u + e^u \cos u - I$

$2I = e^u \sin u + e^u \cos u + C \Rightarrow I = \frac{e^u}{2}(\sin u + \cos u) + C$

Tilbake til x: $u = \arcsin x$,

$$I = \frac{e^{\arcsin x}}{2}\left(x + \sqrt{1-\sin^2 u}\right) + C = \underline{\underline{\frac{e^{\arcsin x}}{2}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + C}}$$

Delbrøkoppspalting

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad P, Q \text{ polynomer.}$$

Hovedtrinn:

1. Polynomdivisjon hvis $\text{grad}(P(x)) \geq \text{grad}(Q(x))$
2. Oppspalting:

$$\frac{P(x)}{\underbrace{(x-r_1)^{m_1}\cdots}_{\text{første grad}}\underbrace{(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}\cdots}_{\text{annengrads}}} = \overbrace{\frac{A_1}{x-r_1}+\frac{A_2}{(x-r_1)^2}+\cdots+\frac{A_{m_1}}{(x-r_1)^{m_1}}}^{\text{ledd som stammer fra } (x-r_1)^{m_1}} + \cdots$$

$$+\underbrace{\frac{B_1x+C_1}{x^2+a_1x+b_1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{B_{n_1}x+C_{n_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}}}_{\text{ledd som stammer fra } (x^2+a_1x+b_1)^{n_1}}+\cdots$$

3. Integrer delbrøkene.

Eksempel: $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+8}\,dx$

Den deriverte av nevneren $(x^2+4x+8)' = 2x+4$ smugles inn i telleren

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+4-4-2}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx - \int\frac{3}{x^2+4x+8}$$

$u = x^2+4x+8$

$du = (2x+4)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} - \int\frac{3}{x^2+4x+8}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| - 3\underbrace{\int\frac{1}{x^2+4x+8}\,dx}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - 3I$$

løsning opprinnelig integral.

Regner ut I: $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = \int\frac{1}{\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}+4}\,dx$

$$= \int\frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{(x+2)^2}{4}+1} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}$$

$z = \frac{x+2}{2}$

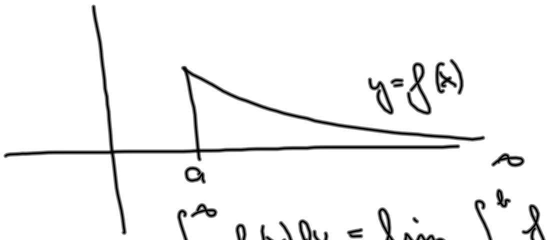
$dz = \frac{1}{2}\,dx$

$dx = 2\,dz$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{2\,dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\arctan z + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2} + C$$

Uegentlige integraler:

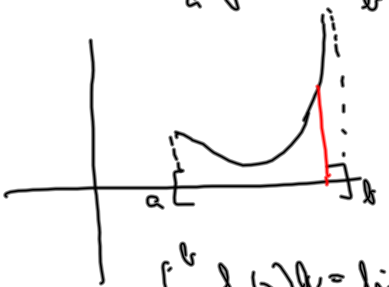
I:



$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Konvergens hvis grenseverdien finnes, divergens ellers.

II

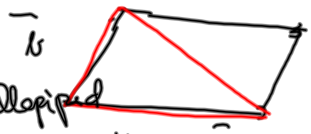


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)\,dx$$

Vektorer, matriser og sånt

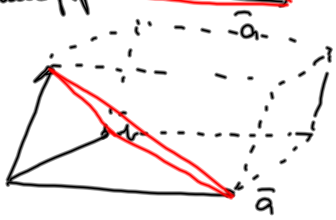
Kryssprodukt: $|\vec{a}\times\vec{b}|$ areal av parallellogram utspent av $\vec{a}, \vec{b}$

$\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ areal av trekant.



$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ volumet av parallellepiped utspent av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

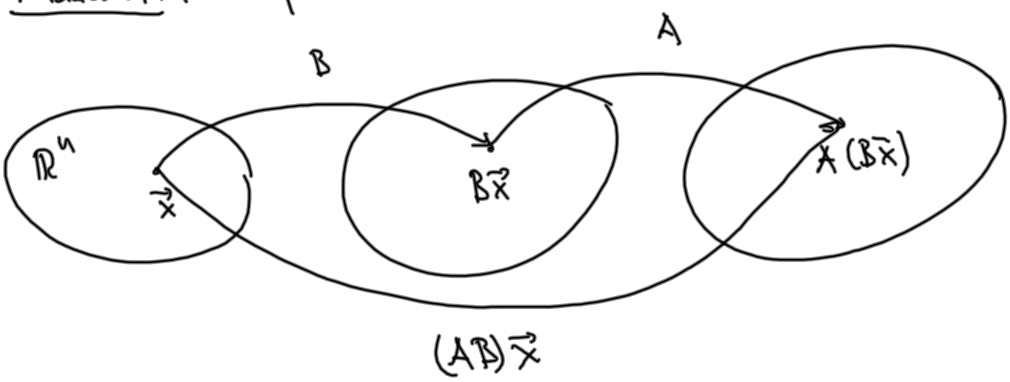
$\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ pyramiden



Determinanter: $|\det(\vec{a},\vec{b})|$ areal utspent av to vektorer i planet.

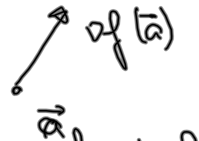
$|\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$ volumet av parallellepiped utspent av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Matriser transformerer vektorer



Funksjoner av flere variable

$f(x_1, \dots, x_n)$: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ derivér m.h.p. x_i som om de andre variablene var konstante.



Gradienten

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

gradienten peker i den retningen hvor funksjonen stiger raskest.

Retningsderivert: $f'(\vec{a}; \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$ forutsatt at f er deriverbar i $\vec{a}$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Jacobi-matrisen:

$$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Eksamen: 10 flervalg à 3 poeng 30 poeng
7 vanlig à 10 poeng 70 poeng
\+ midtveis 50 poeng

150 poeng

4 timer + lommeregner.

I prosent

A: 100 - 92 10 %
B: 91 - 77 25 %
C: 77 - ? 30 %
D: ?-1 - 46 25 %
E: 45 - 40 10 %