n-tupler

Et n-tuppel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ er en liste av n-tall med parentes rundt;

<u>Eksempel</u>: $(-1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, \pi)$ er et 4-tuppel

$(0, 17, 143, \frac{e}{2}, -1)$ — " — 5-tuppel

<u>Notasjon</u>: $\mathbb{R}^n$ = mengden av alle n-tupler av reelle tall

$\mathbb{C}^n$ = ———— " ———— komplekse tall.

Hvis $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ er to n-tupler, så definerer vi

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

Multiplikasjon med tall (skalar):

$$s\vec{a} = (sa_1, sa_2, \dots, sa_n)$$

<u>Skalarproduktet</u>:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

<u>Eksempel</u>: $7(1, -4, 3, 2) - 4(0, 2, -1, -2) =$

$= (7, -28, 21, 14) - (0, 8, -4, -8) = (7, -36, 25, 22)$

<u>Skalarprodukt</u>: $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ t_i er antall timer slave nummer i har arbeidet

$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ p_i timelønn (i øre) for slave nummer i.

$\vec{p} \cdot \vec{t} = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_n t_n$ = hvor mye jeg skylder svina!

Regneregler for n-tupler:

(a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (kommutative lover)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(b)} & s(\vec{a}+\vec{b})=s\vec{a}+s\vec{b}\\ \text{(c)} & (s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a}\\ \text{(d)} & \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{d}\end{array}\right\}\ \text{distributive lover}$$

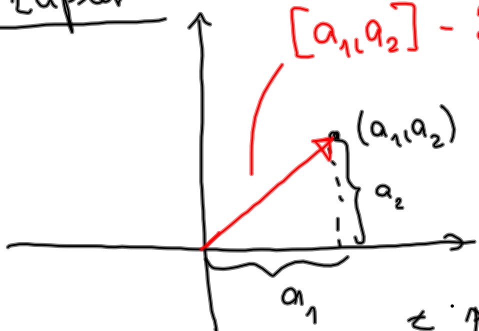
(e) $(s\vec{a})\cdot\vec{b}=s(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\vec{a}\cdot(s\vec{b})=s(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(f) $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$ med likhet bare hvis $\vec{a}=\vec{0}=(0,\dots,0)$

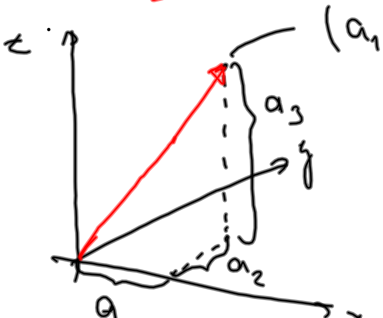
Hvorfor: $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1\cdot a_1+a_2a_2+\dots+a_na_n=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\geq 0$

Geometriske tolkninger (1.2)

2-tupler:



3-tupler (tripler)

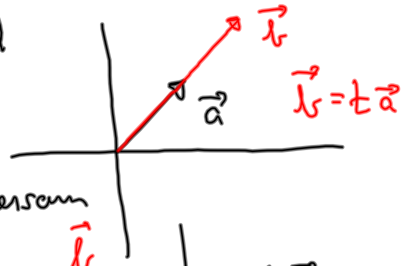


Heretter vil vi bruke vanlige parenteser (a_1,a_2,a_3) både for punkter og vektorer

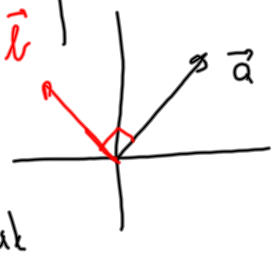
Linjen gjennom $\overbrace{(a_1,a_2,a_3)}^{\text{punkt}}$ parallell med $\overbrace{(b_1,b_2,b_3)}^{\text{vektor}}$

Mål: Å utvide vår geometriske intuisjon fra $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^n$.

- $\vec{a}, \vec{b}$ er parallelle dersom det finnes et tall $t \neq 0$ slik at $\vec{a} = t\vec{b}$



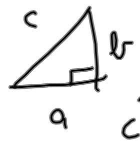
- $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står normalt på hverandre dersom $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



Definisjon: To n-tupler $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ kalles

a) parallelle dersom det finnes et tall $t \neq 0$ slik at $\vec{a} = t\vec{b}$

b) normale eller perpendikulære dersom $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.



$c^2 = a^2 + b^2$

Pytagoras:

$\vec{a} \perp \vec{b}$:

$$\underbrace{|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$$

Lengden til et n-tuppel:

$\vec{a} = (a_1, a_2)$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

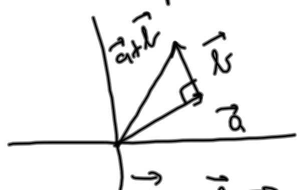
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

Sammenheng: $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Pytagoras' setning for n-tupler: Hvis n-tuplene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står normalt på hverandre, så er

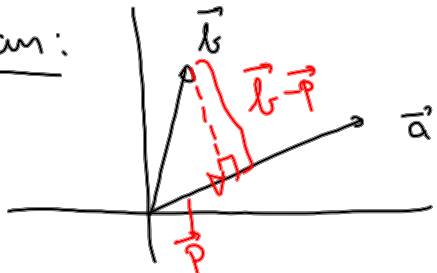
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$$



Bevis: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{0} + \underbrace{\vec{b}\cdot\vec{a}}_{0} + \vec{b}\cdot\vec{b}$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

Projeksjon:



$\vec{p}$ er projeksjonen av $\vec{b}$ ned på $\vec{a}$

$\vec{p}$ er parallell med $\vec{a}$ og $\vec{b}-\vec{p}$ står normalt på $\vec{a}$

dvs: $\vec{p} = t\vec{a}$ for en $t \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{p}) = 0}_{\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a}) = 0}$$

Vi må finne et tall t slik at $\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a}) = 0$:

$$0 = \cancel{\vec{a}\cdot(\vec{b}-t\vec{a})} = \vec{a}\cdot\vec{b} - t(\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$$t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$

Projeksjonen $\vec{p}$ av $\vec{b}$ ned på $\vec{a}$ er gitt ved:

$$\vec{p} = t\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

Lengden til projeksjonen:

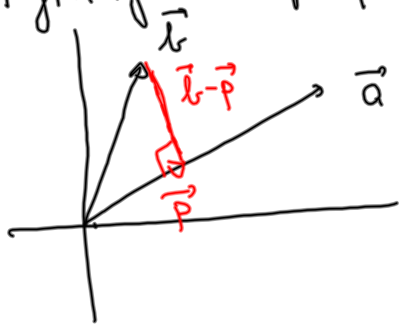
$$|\vec{p}| = \left|\underbrace{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}}_{t}\vec{a}\right| = \underbrace{\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|^{\cancel{2}}}}_{|t|}\cancel{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

Regneregel:

$|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$

$$|t\vec{a}| = |(ta_1, ta_2, \dots, ta_n)|$$
$$= \sqrt{(ta_1)^2 + (ta_2)^2 + \dots + (ta_n)^2}$$
$$= |t|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$
$$= |t||\vec{a}|.$$

Pythagoras + projeksjon: $|\vec{b}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{b}-\vec{p}|^2 \geq |\vec{p}|^2 = \left(\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right)^2$



$$= \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2}$$

dvs

$$|\vec{b}|^2 \geq \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2} \quad \cdot |\vec{a}|^2$$

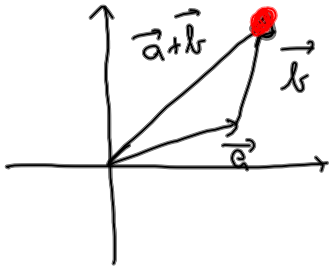
$$(|\vec{a}||\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2$$

dvs

$$|\vec{a}||\vec{b}| \geq |\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

<u>Schwarz' ulikhet</u>: For alle $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, så er

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$



$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$

<u>Trekantulikheten for n-tupler</u>: For alle $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$, så er

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

<u>Bevis</u>: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$

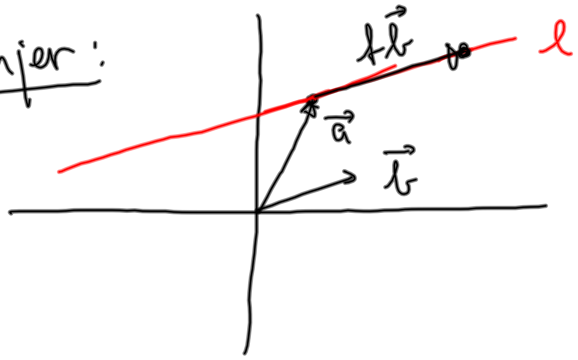
$\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$

$= (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$, altså: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

Dette betyr at

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

Linjer:



linjen gjennom $\vec{a}$ parallell med $\vec{b}$

Et punkt på linjen er på formen

$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b}$

Definisjon: Anta at $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Linjen gjennom $\vec{a}$ parallell med $\vec{b}$ består av punktene

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{b} \quad \text{der } t \in \mathbb{R}$$

Komplekse n-tupler

$\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. der $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Eksempel: $\vec{z} = (i, -4, 2-i, \pi - \sqrt{2}\, i) \in \mathbb{C}^4$ $\quad |z|^2 = |z^2|$

$\vec{z} + \vec{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n)$

$\vec{z} - \vec{w} = (z_1 - w_1, z_2 - w_2, \dots, z_n - w_n)$

$c\vec{z} = (cz_1, cz_2, \dots, cz_n)$, $c \in \mathbb{C}$

$\boxed{|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}}$

Lengden til $\vec{z}$: $|\vec{z}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$

Skalarprodukt: $\vec{z} \cdot \vec{w} = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n}$

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib)$
$= a^2 - (ib)^2$
$= a^2 + b^2 = |z|^2$

$\vec{z} \cdot \vec{z} = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2$
$= |\vec{z}|^2$

Konsekvenser: $\vec{z} \cdot \vec{w} \neq \vec{w} \cdot \vec{z}$ (vanligvis)

$\vec{z} \cdot (c\vec{w}) = \bar{c}\, (\vec{z} \cdot \vec{w})$