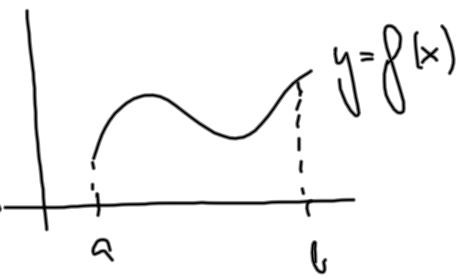
Integrasjon



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, begrenset:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\Phi(\Pi) : \Pi \text{ en partisjon}\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{N(\Pi) : \Pi \text{ en partisjon}\}$$

Hvis $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, så sier vi at f er <u>integrerbar</u> over $[a,b]$ og vi definerer <u>integralet</u> ved

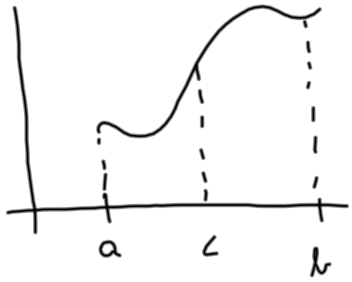
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Er alle kontinuerlige funksjoner integrerbare?
Kan vi regne ut integraler ved antiderivasjon?

Ja! Analysens fundamentalteorem.

Konvensjon: Vi har definert $\int_a^b f(x)\,dx$ når $a<b$. Vi definerer

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{når } a>b$$



Lemma: For alle a,b,c gjelder

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

og
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

Lemma: Hvis $H,G:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og $H'(x)=G'(x)$ for alle $x\in(a,b)$, så er

$$H(x)-G(x) \text{ konstant},$$

dvs $H(x)=G(x)+C$ der C er konstant.

Bevis: Sett $F(x)=H(x)-G(x)$. Da er

$$F'(x)=H'(x)-G'(x)=0 \text{ for alle } x\in(a,b).$$

Ifølge middelverdisetningen er

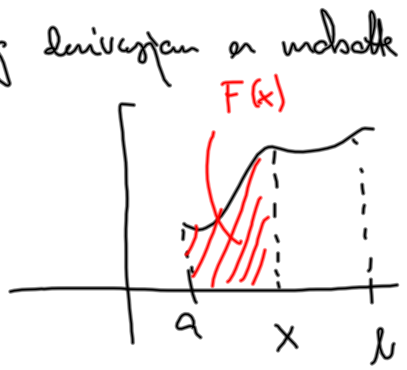
$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(\underset{\in (a,x)}{c}) = 0 \Rightarrow F(x)=F(a)$$

Altså er $F(x)$ konstant lik $F(a)$.

Altså er $H(x)-G(x)=F(x)=F(a)=C \Longrightarrow H(x)=G(x)+C$

Vi ønsker å vise at integrasjon og derivasjon er motsatte regneoperasjoner, dvs. hvis

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$



så er

$$F'(x)=f(x).$$

Analysens fundamentalteorem: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på alle intervaller $[a,x]$ der $x\in[a,b]$, og funksjonen

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

er en antiderivert til f. (dvs $F'(x)=f(x)$ for alle $x\in(a,b)$).

Bevis: Idé: La

$$H(x)=\overline{\int_a^x} f(t)\,dt, \quad G(x)=\underline{\int_a^x} f(t)\,dt$$

Vi skal vise $H'(x)=G'(x)=f(x)$. Da vet vi at $H(x)=G(x)+C$, og siden $H(a)=G(a)=0$, må $C=0$. Det betyr at $H(x)=G(x)$, så f er integrerbar på $[a,x]$ og

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=H(x)=G(x)$$

og

$$F'(x)=H'(x)=f(x).$$

Det gjenstår å vise at $H'(x)=G'(x)=f(x)$. Vi nøyer oss med å se på $H'(x)$.

Har $H(x) = \bar{\int}_a^x f(t)\,dt$.

Må vise $H'(x) = f(x)$. Vet at

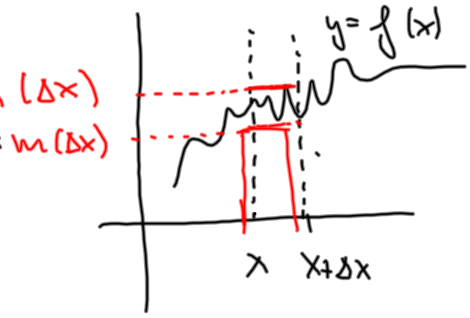
$$H'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{H(x+\Delta x)-H(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\bar{\int}_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \bar{\int}_a^{x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(\cancel{\bar{\int}_a^{x} f(t)\,dt} + \bar{\int}_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right) - \cancel{\bar{\int}_a^{x} f(t)\,dt}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\bar{\int}_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

Må vise at denne er lik $f(x)$!

(Ser på tilfellet $\Delta x > 0$)

$$\frac{m(\Delta x)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \le \frac{\bar{\int}_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \le \frac{M(\Delta x)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$



dvs

$$m(\Delta x) \le \frac{\bar{\int}_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \le M(\Delta x)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow \; \Delta x \to 0 & \downarrow \\ f(x) & f(x) & f(x) \end{array}$$

Dermed har vi vist at $H'(x) = f(x)$. Tilsvarende viser man at $G'(x) = f(x)$. Dermed er beviset komplett!!!

Har vist: Hvis f er kontinuerlig, så er
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
en antiderivert til f, dvs $F'(x) = f(x)$.

Korollar: Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at K er en antiderivert til f. Da er
$$\int_a^b f(t)\,dt = K(b) - K(a) = \left[K(x)\right]_a^b$$

Bevis: Siden både $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ og $K(x)$ er antideriverte til f, så skiller de seg på en konstant $F(x) = K(x) + C$. Dermed er
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = F(b) - \underbrace{F(a)}_{0} = (K(b) + \cancel{C}) - (K(a) + \cancel{C})$$
$$= K(b) - K(a)$$

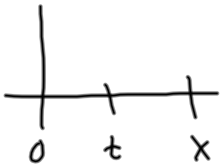
Eksempel: $\int_1^2 x^3\,dx$ Antiderivert til x^3: $K(x) = \frac{x^4}{4}$
$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$$

Noen integraler kan ikke regnes ut:

$$\int e^{x^2}\,dx \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

<u>Eksempel</u>: Hva er den deriverte til

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \;?$$



Analysens fundamentale teorem:

$$F'(x) = e^{x^2}.$$

<u>Eksempel</u>: Hva er den derivert til

$$\boxed{G(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt \quad ?}$$

La $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$, så er $G(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2}\,dt = F(\sin x)$

Vet at $F'(x) = e^{x^2}$!

$$G'(x) = F'(\sin x)\cos x = \underline{e^{\sin^2 x}\cos x}$$

<u>Eksempel</u>: $G(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{\sin x}{x}\,dx$ Finn $G'(x)$?

La $K(x)$ være en antiderivert til $\frac{\sin x}{x}$. Da er

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = K(b) - K(a) \qquad K'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Det betyr at

$$G(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{\sin x}{x}\,dx = K(x^4) - K(x^2)$$

altså

$$G'(x) = K'(x^4)\,4x^3 - K'(x^2)\,2x = \frac{\sin x^4}{x^{\cancel{4}}}\,4\cancel{x^3} - \frac{\sin x^2}{\cancel{x^2}}\,2\cancel{x}$$

$$= \underline{\frac{4\sin(x^4)}{x} - \frac{2\sin(x^3)}{x}}$$

Ubestemte integraler

Det ubestemte integralet

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

er en betegnelse på den generelle antiderivert til f.

Eksempel: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

Liste av noen integraler

OBS.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{hvis } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$