Vektorproduktet

Hvis $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, så markerer vi vektorproduktet eller kryssproduktet ved $\vec{a} \times \vec{b}$.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \underbrace{a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}}$

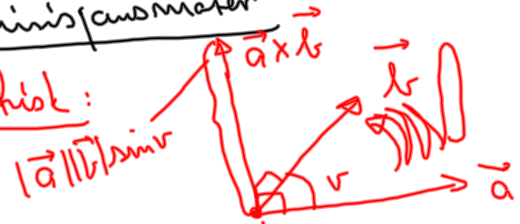
$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

To definisjonsmåter:

Geometrisk:



Algebraisk: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}\vec{i} + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}\vec{j} + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}\vec{k}$$

Huskeregel:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}.$$

Regneregler:

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ antikommutativt.

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$

$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$

(iii) $(s\vec{a}) \times \vec{b} = s(\vec{a} \times \vec{b})$

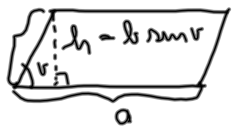
$\vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b})$

(iv) $\vec{a} \times \vec{b}$ står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$

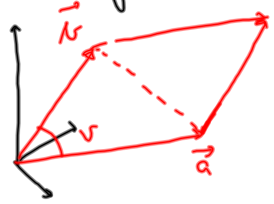
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ hvis og bare hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

Arealer og volumer

Areal til et parallellogram:



$A = g\,h = a(b \sin v) = a\,b \sin v.$



$A_p = |\vec{a}||\vec{b}| \sin v = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$A_T = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

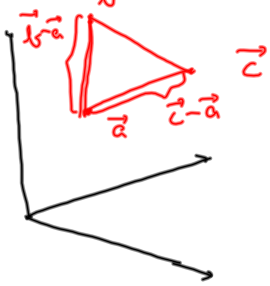
Setning: Anta at $\vec{a}, \vec{b}$ er to vektorer i $\mathbb{R}^3$. Da er arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ lik

$$A_p = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

mens arealet til trekanten utspent av $\vec{a}, \vec{b}$ er lik

$$A_T = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Eksempel: Finn arealet til trekanten med hjørner i $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-1,0,1)$ og $\vec{c} = (1,1,4)$



Trekanten har samme areal som den utspent av $\vec{b}-\vec{a}$ og $\vec{c}-\vec{a}$, altså

$$A = \frac{1}{2}\left|(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a})\right|$$

Hjelperegning: $\vec{b} - \vec{a} = (-2,-2,-2)$

$\vec{c} - \vec{a} = (0,-1,1)$

Kryssprodukt:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

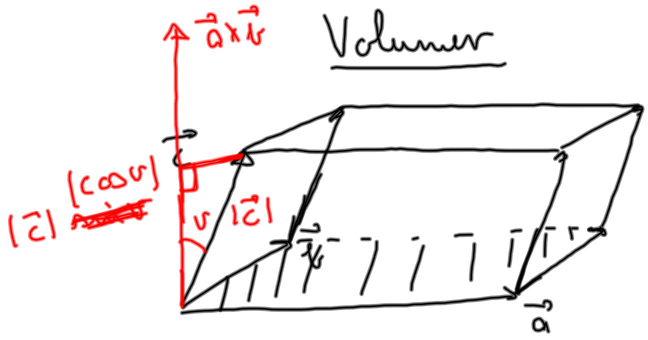
$(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a}) = (-2 - 2)\vec{i} + (0 + 2)\vec{j} + (2 - 0)\vec{k}$

$= -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-4,2,2).$

$\text{Areal} = \frac{1}{2}\|(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a})\| = \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{(-4)^2}_{16} + \underbrace{2^2}_{4} + \underbrace{2^2}_{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{24}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 6} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}.$

Volumer



parallellepipedet utspent av $\vec a, \vec b, \vec c$

Volum: $V = \underbrace{g}_{|\vec a\times\vec b|}\cdot\underbrace{h}_{|\vec c|\,|\cos v|} = |\vec a\times\vec b|\,|\vec c|\,|\cos v| = |(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|.$

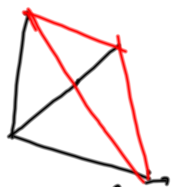
$\vec u\cdot\vec v = |\vec u||\vec v|\cos v$

Volumet til parallellepipedet utspent av $\vec a, \vec b, \vec c$ er

$$|(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|.$$

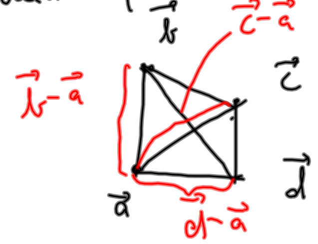
Volumet til pyramiden utspent av $\vec a, \vec b, \vec c$ er

$$\frac{1}{6}|(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|$$



Eksempel: Volumet til pyramiden med hjørner $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ er:

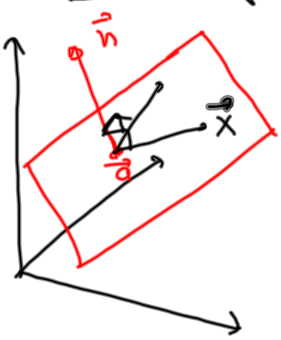
Samme som pyramiden utspent av $\vec b-\vec a,\ \vec c-\vec a,\ \vec d-\vec a$.



$$V = \frac{1}{6}\Big(\underbrace{(\vec b-\vec a)\times(\vec c-\vec a)}_{\text{regn ut dette først}}\Big)\cdot\underbrace{(\vec d-\vec a)}$$

regn ut dette etterpå

Ligning for plan



Ønsker å finne en ligning som oppfylles av punktene i planet.

Gitt ved: Et punkt $\vec a$ i planet og en normalvektor $\vec n$.

Et punkt $\vec x$ i planet oppfyller:

$\vec n\cdot(\vec x-\vec a)=0$ (dvs $\vec n \perp (\vec x-\vec a)$)

Hvis $\vec n=(n_1,n_2,n_3)$, $\vec a=(a_1,a_2,a_3)$

$\vec x=(x,y,z)$

$$0=(n_1,n_2,n_3)\cdot(x-a_1,y-a_2,z-a_3)$$

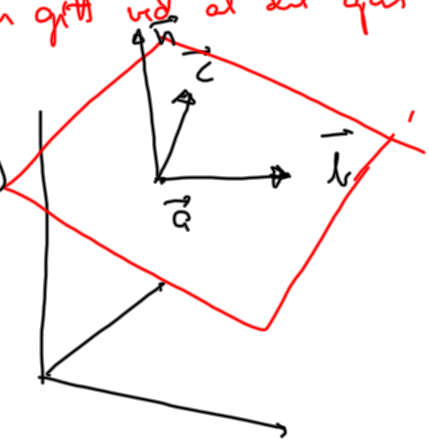
$$= n_1x-n_1a_1+n_2y-n_2a_2+n_3z-n_3a_3$$

dvs $n_1x+n_2y+n_3z=\underbrace{n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3}_{\text{tall}}$

f.eks. $3x-2y+4z=17$

Hva hvis planet isteden er gitt ved at det går gjennom tre gitte punkter?

Normalvektor: $\vec n=(\vec b-\vec a)\times(\vec c-\vec a)$



Bruk prosedyren ovenfor med $\vec n$ og $\vec a$.

$\vec n\cdot(\vec x-\vec a)=0$

Matriser

En $m\times n$-matrise er et rektangulært oppsett av tall i m linjer og n søyler:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eksempel: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & \pi & -7 \\ \sqrt{2} & -1 & 14 & 3/2 \end{pmatrix}$ En 3×4-matrise.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & \sqrt{17} \\ e & 3 & \ln 37 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – 4×3-matrise

To spesialtilfeller:

$1\times n$-matrise $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$: linjevektor, radvektor

$m\times 1$-matrise $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$: søylevektor

Hvis $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1}, & b_{m2}, & \ldots, & b_{mn} \end{pmatrix}$, så

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12}, & \ldots, & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1}, & \ldots & , & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$ adderer komponentvis

$A-B$ tilsvarende.

c et tall

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ca_{m1} & \cdots & & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponering:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\times n}, \quad A^T = \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n\times m}}^{A\text{-transponert}}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

3×2 $\quad$ 2×3

Regneregler: $(A+B)^T = A^T + B^T$

$(cA)^T = cA^T$.

$(A^T)^T = A$.

Hva er matrisen nyttige til?

Vi skal hovedsakelig bruke matriser til å transformere informasjon: A $m\times n$-matrise

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow A\vec{x} = \vec{y} \in \mathbb{R}^m$$