Matriser og vektorer

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n\text{-matriser}$$

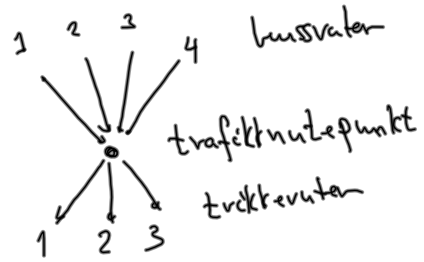
Vektorer: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tenker på n-tupler som søylevektorer.

Mål: Å definere $A\vec{x}$ på en fornuftig måte.

Innfallsvinkel: Matriser transformerer kunnskap.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{A\vec{x}} \vec{y} \in \mathbb{R}^m$$

Eksempel:



$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Overgangsinformasjon:

Buss 1	0.3	trikk 1
	0.2	trikk 2
	0.4	trikk 3
Buss 2	0.5	trikk 1
	0.1	— " — 2
	0.4	— " — 3
Buss 3	0.4	— " — 1
	0.4	— " — 2
	0.1	— " — 3
Buss 4	0.3	— " — 1
	0.3	— " — 2
	0.2	— " — 3

organiserer informasjon i matrise

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}}_{\text{overgangsmatriser.}} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4$$

$$y_2 = 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4$$

$$y_3 = 0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4$$

Definisjon: Anta at A er en $m \times n$-matrise og at $\vec{x}$ er en søylevektor i $\mathbb{R}^n$. Da er produktet $A\vec{x}$ definert ved

$$\underset{\mathbb{R}^m}{\vec{y}} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{prikkprodukt av første linje med } \vec{x} \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3×4-matrise

$$\vec{y} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 + 4\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 3(-1) + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Regneregler:
(i) $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$
(ii) $(A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$
(iii) $A(s\vec{x}) = sA\vec{x}$
(iv) $(sA)\vec{x} = s(A\vec{x})$

Multiplikasjon av matriser

Spørsmål: Hva er produktet AB av to matriser?

Alles tips:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Hadamard-produktet

Litt spesielt!

Skal definere et annet og nyttigere produkt!

$$\begin{tikzcd} \underset{\mathbb{R}^k}{\vec{x}} \arrow[r, "B"', "n\times k\text{-matrise}"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & \underset{\mathbb{R}^n}{\vec{y} = B\vec{x}} \arrow[r, "A"', "m\times n\text{-matrise}"] & \underset{\mathbb{R}^m}{\vec{z} = A\vec{y}} \end{tikzcd}$$

Kan vi finne en matrise C som gjør begge operasjonene i ett, altså at $\vec{z} = C\vec{x}$?

JA! En slik matrise C finnes og den er gitt ved:

$$\underbrace{c_{ij}}_{\text{elementet i linje } i \text{ og søyle } j} = \underset{A}{\begin{pmatrix} \text{i-te linje} \\ \\ m\times n \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} \text{j-te søyle} \\ \\ n\times k \end{pmatrix}} = \text{prikkproduktet av i-te linje i } A \text{ med j-te søyle i } B$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Definisjon: Dersom A er en $m\times n$-matrise og B er en $n\times k$-matrise, så er produktet $C = AB$ $m\times k$-matrisen der komponentene er gitt ved

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

206 G.M.

Hold styr på dimensjonene:

$$\underbrace{A}_{m\times n}\ \underbrace{B}_{n\times k} = \underbrace{C}_{m\times k} = (m\times \cancel{n})(\cancel{n}\times k)$$

"indre dimensjoner må stemme"

"forkorter indre dimensjoner".

Eksempel: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 3\text{-matrise}}, \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 2\text{-matrise}}$

indre dimensjoner stemmer

C må være en 2×2-matrise

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Regneregler: (i) $(AB)C = A(BC)$

(ii) $A(B+C) = AB + AC$

(iii) $(A+B)C = AC + BC$

(iv) $(sA)B = s(AB)$, $A(sB) = s(AB)$

Men OBS!

$AB \neq BA$

i de fleste tilfeller.

Generelt: $\underbrace{A\,B}_{m\times n \;\; n\times k}$ ✓ $\underbrace{B\,A}_{n\times k \;\; m\times n}$ ✓ bare definert hvis $k=m$

Ofte er det ene produktet definert mens det andre ikke er det!

Men selv om begge produktene er definert er de som regel forskjellige:

Eksempel: $\cancel{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$, $B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$, $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2(-1) + 0\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & 3(-1) + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$

$$BA = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Oppsummering:

$$\begin{tikzcd} \vec{x} \arrow[r, bend left, "B"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & \vec{y} = B\vec{x} \arrow[r, bend left, "A"] & \vec{z} = A\vec{y} = A(B\vec{x}) \end{tikzcd}$$

$$\vec{z} = C\vec{x} = (AB)\vec{x}$$

Identitetsmatrisen og inverse matriser

Kvadratiske matriser: $n\times n$-matriser.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ $n\times n$-identitetsmatrisen.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$

$$AI_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} = A, \quad I_3 A = A.$$

Inverse fall:
$a^{-1}\cdot a = 1$
a^{-1} finnes unntatt når $a=0$.

Generelt: $\underbrace{A}_{n\times n} I_n = I_n A = A$

Inverse matriser: Hvis A er en $n\times n$-matrise, så kalles B en invers matrise til A dersom

$$AB = I_n \quad \text{og} \quad BA = I_n.$$

OBS: Hvis $AB = I_n$, vil også $BA = I_n$.
OBS: Ikke opplagt.

Setning: En $n\times n$-matrise A kan høyst én invers matrise.

Bevis: Anta at B og C er inverser til A. Da

$$B = B\underbrace{I_n}_{AC} = B(AC) = \underbrace{(BA)}_{I_n}C = I_n C = C$$

Eksempel. Har $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ en invers?

Anta at $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ er en invers, da må $AB = I_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2z & y-2u \\ -2x+4z & -2y+4u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x - 2z = 1$
$y - 2u = 0$
$-2x + 4z = 0 \Rightarrow x - 2z = 0$
$-2y + 4y = 1$

Ligningssystemet er umulig å oppfylle, A har ingen invers!

Regneregel: Hvis A, B er inverterbare $n\times n$-matriser, så er AB også inverterbar og

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Sjekk: Må sjekke $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A\underbrace{(BB^{-1})}_{I_n})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$