Kontinuitet og følger

Idé: Dersom x nærmer seg a, bør $f(x)$ nærme seg $f(a)$ når f er kontinuerlig

Konkretisering:

Setning: f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ for alle følger $\{x_n\}$ fra D_f slik at $x_n \to a$.

Bevis: Anta først at f er kontinuerlig i a og at $x_n \to a$. Må vise at $f(x_n) \to f(a)$.

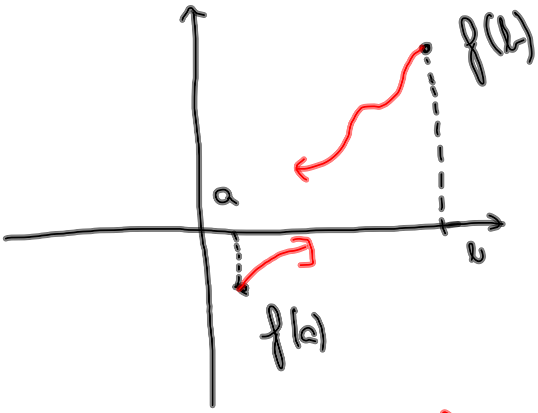
Gitt $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ når $n \geq N$. Siden f er kontinuerlig i a, finnes det en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ når $|x - a| < \delta$. Siden $x_n \to a$, finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at hvis $n \geq N$, så er $|x_n - a| < \delta$. Men dette betyr at dersom $n \geq N$, så er $|x_n - a| < \delta$, dvs $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Hurra!

Det gjenstår å vise at hvis f <u>ikke</u> er kontinuerlig i a, så finnes det minst én følge $\{x_n\}$ slik at $x_n \to a$, men $f(x_n) \not\to f(a)$.

Siden f ikke er kontinuerlig i a, finnes det en $\varepsilon > 0$ som ikke kan pareres av noen $\delta > 0$; dvs at for enhver $\delta > 0$, finnes det et tall $x \in D_f$ slik at $|x-a| < \delta$, men $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

<u>Spesielt</u>: Hvis $\delta = \frac{1}{n}$, finnes det en $x_n \in D_f$ slik at $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, men $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Da vil $x_n \to a$, men $f(x_n) \not\to f(a)$.

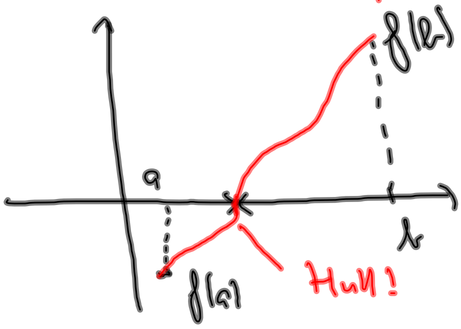
Skjæringssetningen



f går fra negativ f(a) til positiv f(b) uten å ha noe nullpunkt innimellom.

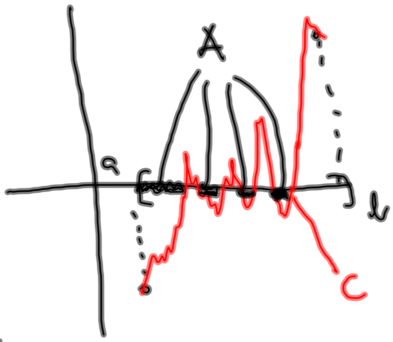
Hva skjer hvis f er kontinuerlig?

Hva hvis det er hull i tallinjen?



Skjæringssetningen: Anta at $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn. Da finns det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$.

Bevis: Ser på tilfellet der $f(a)<0$, $f(b)>0$.

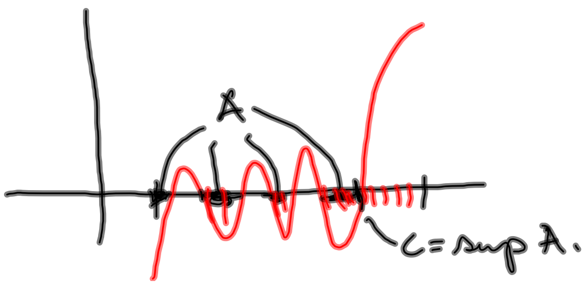


La $A = \{x : f(x) < 0\}$ og la $c = \sup A$. Vi skal vise at $f(c)=0$ ved først å vise at $f(c) \geq 0$ og så vise at $f(c) \leq 0$.

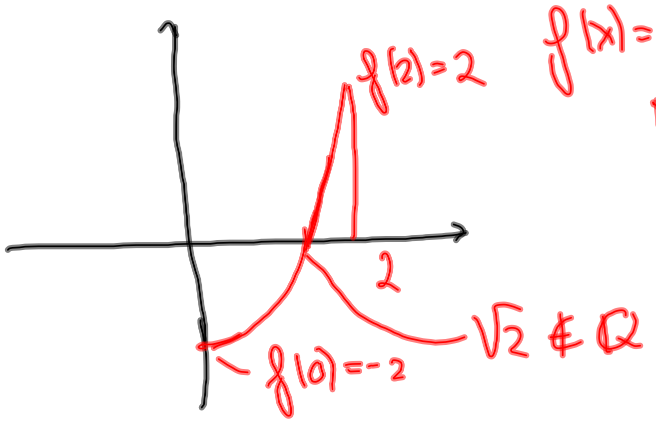
Vi vet $f(c+\frac{1}{n}) \geq 0$, og $c+\frac{1}{n} \to c$. Siden f er kontinuerlig må da $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(c+\frac{1}{n})$, og følgelig er $f(c) \geq 0$.

Siden c er minste øvre skranke for A, kan $c-\frac{1}{n}$ ikke være en øvre skranke for A. Det finnes altså et tall z_n i A som er større enn $c-\frac{1}{n}$. Siden $z_n \in A$, er $f(z_n) < 0$ og $z_n \to c$. Siden f er kontinuerlig er da $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) \leq 0$.

Dermed har vi $f(c) \geq 0$ og $f(c) \leq 0$, og følgelig er $f(c) = 0$.



Eksempel: Hvis vi bare hadde de rasjonale tallene $\mathbb{Q}$, ville ikke skjæringssetningen ha holdt:



$f(x) = x^2 - 2$

Nullpunkt

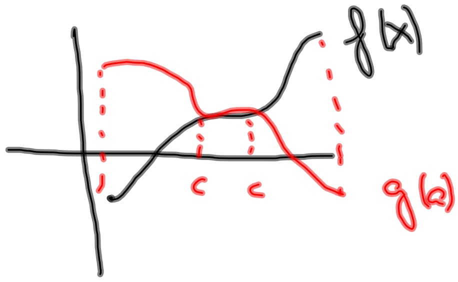
$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$

<u>Eksempel:</u> Vis at funksjonen $f(x) = \cos x - x$ har et nullpunkt i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= \cos 0 - 0 = 1 \\ f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}$$ Skjæringssetningen sier at det finnes et nullpunkt.

<u>Oppgavetips:</u> "Vis at det finnes ..." betyr som regel <u>ikke</u> at du skal finne nullpunktet, løsningen.....

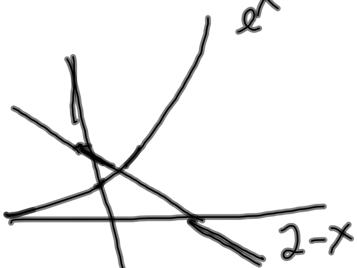
Hva med denne situasjonen?



<u>Korollar:</u> Anta at $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner slik at $g(a) > f(a)$ og $g(b) < f(b)$. Da finnes det en $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = g(c)$.

<u>Bevis:</u> La $h(x) = f(x) - g(x)$. Da er h kontinuerlig og $h(a) = f(a) - g(a) < 0$, men $h(b) = f(b) - g(b) > 0$. Ifølge skjæringssetningen finnes det et punkt c slik at $0 = h(c) = f(c) - g(c)$, dvs $f(c) = g(c)$.

<u>Eksempel:</u> Vis at $f(x) = e^x$ og $g(x) = 2 - x$ har et skjæringspunkt i $[0,1]$:

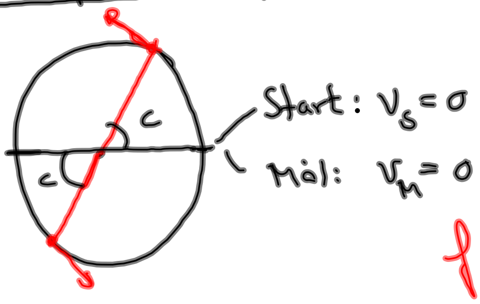


$f(0) = e^0 = 1$, $g(0) = 2 - 0 = 2$.

$f(1) = e^1 = e$, $g(1) = 2 - 1 = 1$

$f(0) < g(0)$, $f(1) > g(1)$ Altså et skjæringspunkt.

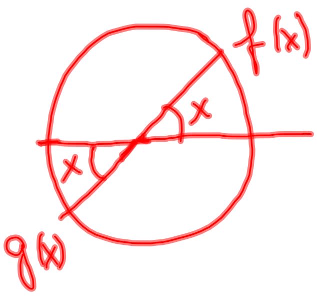
Eksempel: Løp rundt sirkel:

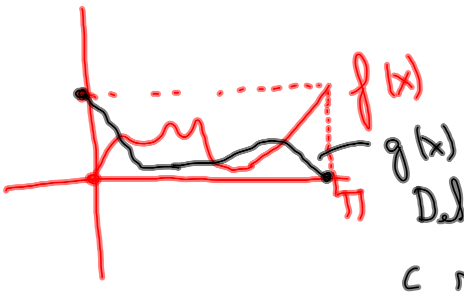


Påstand: Det finnes to diametralt motsatte punkter der løperen har samme fart.

$f(x)$: farten en vinkel x etter start

$g(x)$: — " — etter halvveis.



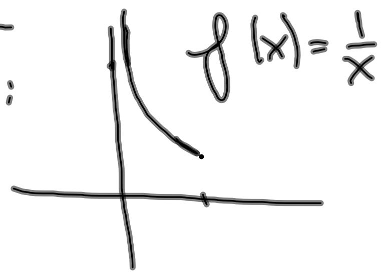


$g(0) \geq f(0) = 0$

$f(\pi) \geq g(\pi) = 0$

Det må finnes et punkt c slik at $g(c) = f(c)$

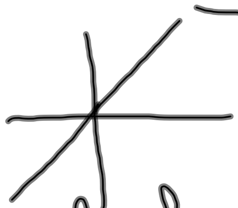
Ekstremalverdisetningen



Funksjonen kan være ubegrenset:

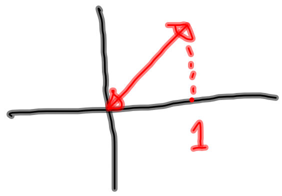
$f(x)=\frac{1}{x}$ på $(0,1)$

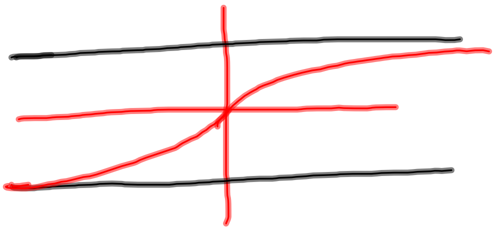
$g(x)=x$ på $\mathbb{R}$



Funksjonen kan være begrenset uten å ha maks./min.-punkter

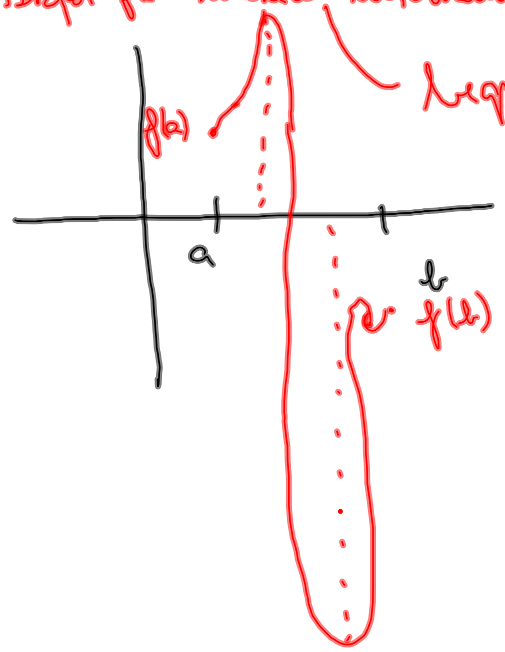
$h(x)=x$ på $(0,1)$

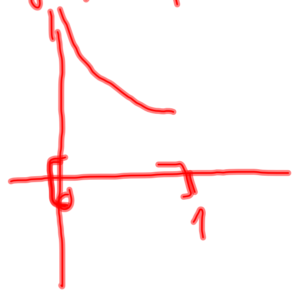




Hva skjer på lukkede intervaller med kontinuerlige funksjoner?

begrenset





Ekstremalverdisetning: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall. Da har f maksimums- og minimumspunkter og er følgelig begrenset.

Maksimum: $c \in [a,b]$ slik at $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in [a,b]$

Minimum: $d \in [a,b]$ slik at $f(d) \leq f(x)$ for alle $x \in [a,b]$.