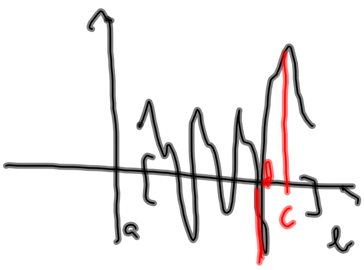
Ekstremalverdisetningen

Ekstremalverdisetningen: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall. Da har f maksimums- og minimumspunkter i intervallet $[a,b]$, dvs. at det finnes punkter $c,d\in[a,b]$ slik at

$$f(d)\le f(x)\le f(c) \quad \text{for alle } x\in[a,b].$$

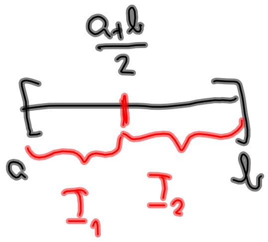


<u>Bevis</u> (for maksimumsdelen:) La

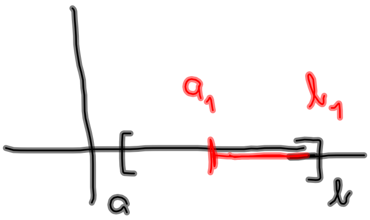
$$\alpha = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

der $\alpha = \infty$ dersom mengden ikke er oppad begrenset.

La $\alpha_1 = \sup\{f(x) : x \in I_1\}$, $\alpha_2 = \sup\{f(x) : x \in I_2\}$.

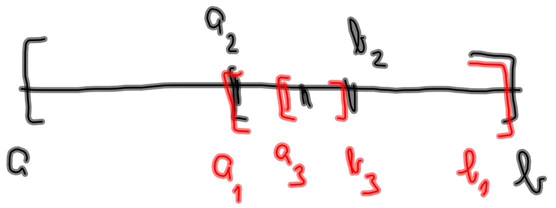


Minst én av disse verdiene må være lik α. Kall det tilhørende intervallet (dvs enten I_1 eller I_2) for $[a_1, b_1]$



Gjenta argumentet med $[a_1, b_1]$ og få et delintervall $[a_2, b_2]$ der supremum også er α.

Fortsetter vi slik, får vi en følge av intervaller



$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \dots$$

der $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

og

$$\alpha = \sup\{f(x) : x \in [a_n, b_n]\}$$

$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots$

Følgen $\{a_n\}$ er voksende og begrenset av b, og konvergerer dermed mot et punkt c.

Siden $\sup\{f(x) : x \in [a_n,b_n]\} = \alpha$, må det finnes en $c_n \in [a_n,b_n]$ slik at $f(c_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$.

Siden $a_n \to c$ og $b_n - a_n \to 0$, må $c_n \to c$.

Siden f er kontinuerlig, må da $f(c_n) \to f(c)$

På den annen side er $\alpha - \frac{1}{n} \leq f(c_n) \leq \alpha$, så $f(c_n) \to \alpha$.

Altså er $f(c) = \alpha$. Siden

$$\alpha = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

betyr dette at c er et maksimumspunkt for funksjonen.

Eksempel: Vis at

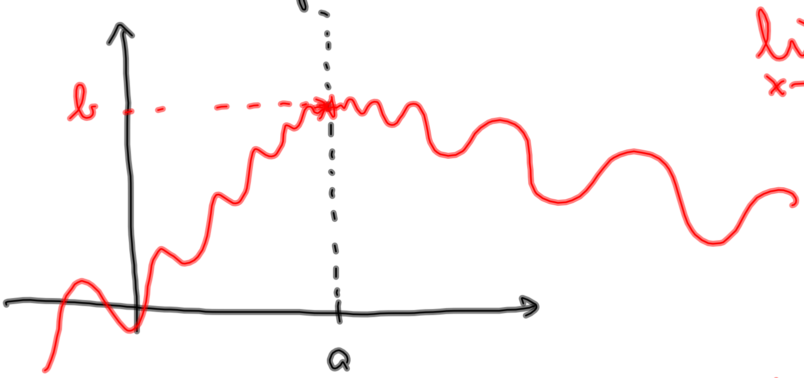
$$f(x) = \frac{x^{e^x} + (x^2)^{\sin x}}{e^{\cos x^4} + x^{2137}}$$

har et maksimumspunkt på intervallet

$$\left[\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[4]{10134.2}\right]$$

Opplagt siden $f(x)$ er kontinuerlig og intervallet er lukket og begrenset.

Grenseverdier



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

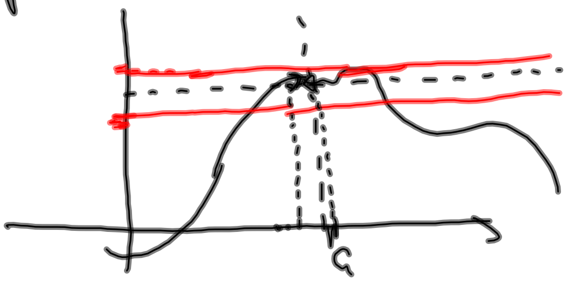
"Vi kan få $f(x)$ så nær L vi måtte ønske ved å velge x tilstrekkelig nær a"

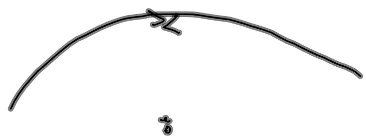
<u>Definisjon:</u> L er grenseverdien for $f(x)$ når x går mot a dersom f er definert i alle punkter tilstrekkelig nær a, men ikke nødvendigvis i a selv, og

Dersom det for hver $\varepsilon > 0$, finnes en $\delta > 0$ slik at

$|f(x) - L| < \varepsilon$ for alle x slik at $0 < |x-a| < \delta$.

Ingen krav på $f(a)$.





Setning: Dersom $\lim_{x \to a} f(x) = F$ og $\lim_{x \to a} g(x) = G$, så

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = F + G$

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = F - G$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = FG$

(iv) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$ forutsatt at $G \neq 0$.

Eksempel på (utvidet?) bruk:

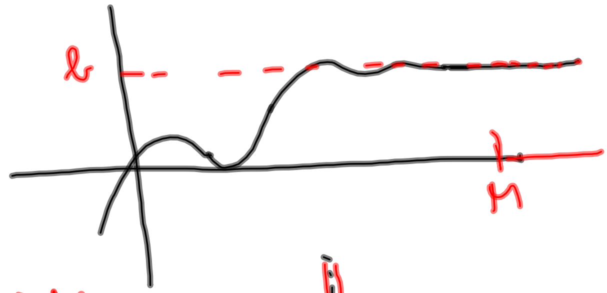
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2}{x + 4} \overset{(iv)}{=} \frac{\lim_{x \to 3} (x^3 + 2)}{\lim_{x \to 3} (x + 4)} \overset{(i)}{=} \frac{\lim_{x \to 3} x^3 + \lim_{x \to 3} 2}{\lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 4}$$

$3 \cdot 3 \cdot 3$

$$= \frac{\lim_{x \to 3} x \lim_{x \to 3} x \lim_{x \to 3} x + 2}{3 + 4} = \frac{27 + 2}{3 + 4} = \underline{\underline{\frac{29}{7}}}$$

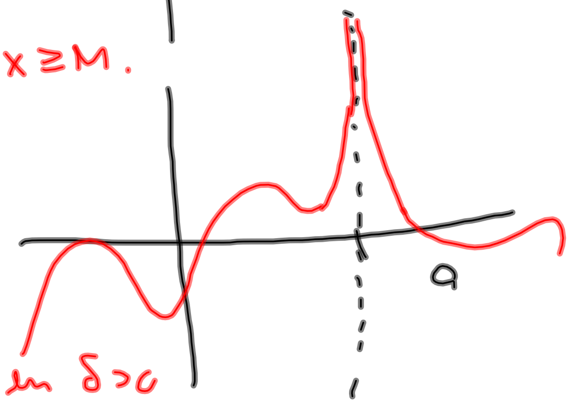
Noen tilleggsdefinisjoner:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$



For enhver $\varepsilon > 0$ finnes det en $M \in \mathbb{R}$ slik at $|f(x) - L| < \varepsilon$ når $x \geq M$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$



For enhver $M \in \mathbb{R}$ finnes det en $\delta > 0$ slik at når $0 < |x-a| < \delta$, så er $f(x) \geq M$.

Eksempel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+7x^4}{2-3x^4+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+7\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{2}{x^4}-3+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+7}{\frac{2}{x^4}-3+\frac{2}{x^2}} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

0

Eksempel.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(3+\frac{2}{x^4}\right)}{\cancel{x^3}\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty} \underbrace{\frac{3+\frac{2}{x^4}}{2-\frac{1}{x^3}}}_{\to\frac{3}{2}} = \infty.$$

Eksempel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - x + \sqrt{x}}{2x - 3\underset{\uparrow \; x^{1/2}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} \frac{3x^{3/2} - x^{1/2} + 1}{2x^{1/2} - 3} = -\frac{1}{3}.$$

Triks for kvadratrøtter:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)}{x\,(\sqrt{4+x} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{4} + x - \cancel{4}}{x\,(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{4+x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

Eksempel: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

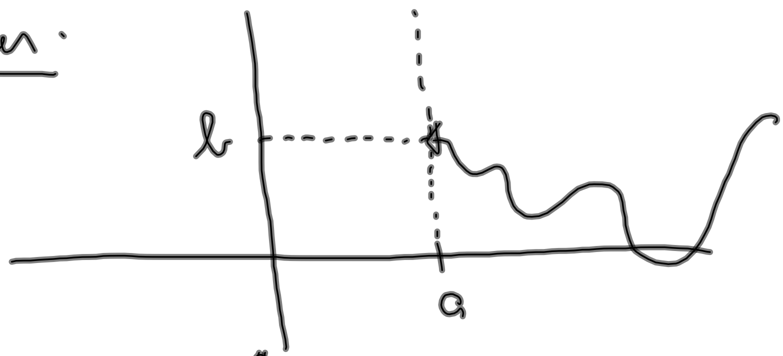
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

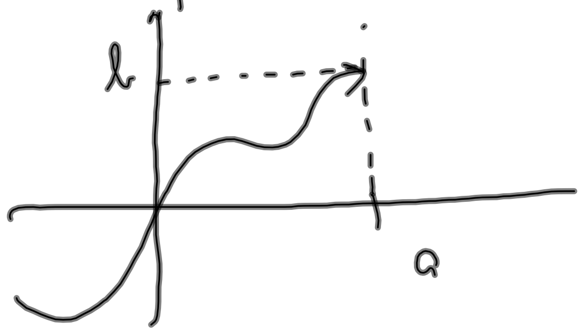
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot 1}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{\downarrow 1}+1} = \frac{1}{2}$$

Ensidige grenser.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$$



$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = b \text{ og } \lim_{x\to a^-} f(x) = b$$

Eksempel: Finn $\lim_{x \to 0} f(x)$ når

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{når } x > 0 \\ 2x+1 & \text{når } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \underline{1} \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (2x+1) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Sammenheng mellom grenseverdier og kontinuitet:

Dersom f er definert i alle punkter tilstrekkelig nær a, så er

$$f \text{ kontinuerlig i } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$