Determinanter

Til enhver kvadratisk matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (n\times n)\text{-matrise}$$

hører det et tall

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

som kalles determinanten til A. Vi skal se på 2×2 og 3×3-determinanter.

2×2-determinanter

Definisjon: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

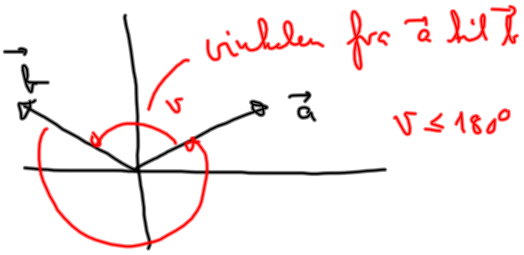
Eksempel: $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - 3\cdot 3 = -7-9 = \underline{-16}$

Geometrisk tolkning av $\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ der $\vec{a}=(a_1,a_2)$ og $\vec{b}=(b_1,b_2)$

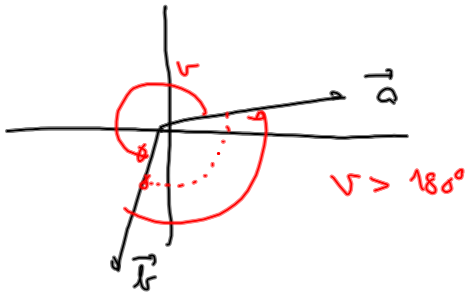
Orientering av par av vektorer $(\vec{a},\vec{b})$

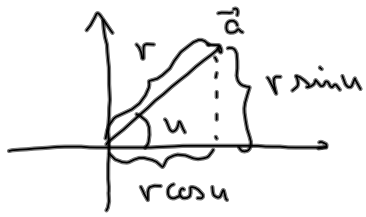
Paret $(\vec{a},\vec{b})$ er positivt orientert dersom vinkelen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ i positiv omløpsretning er mindre enn lik 180°

Hvis ikke er $(\vec{a},\vec{b})$ negativt orientert.



<u>Merk:</u> At $(\vec{b},\vec{a})$ har motsatt orientering av $(\vec{a},\vec{b})$



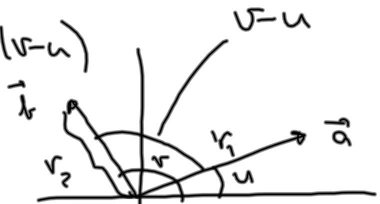


$\vec{a} = (r\cos u, r\sin u)$

$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (r_1\cos u, r_1\sin u) \\ \vec{b} = (r_2\cos v, r_2\sin v)\end{array}\right\}$ polarform til to vektorer.

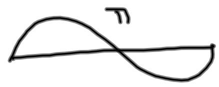
$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} r_1\cos u & r_1\sin u \\ r_2\cos v & r_2\sin v \end{vmatrix} = r_1r_2\cos u\sin v - r_1r_2\sin u\cos v$$

$$= r_1r_2\big(\underbrace{\sin v\cos u - \cos v\sin u}_{\sin(v-u)}\big) = r_1r_2\sin(v-u)$$



$\det(\vec{a},\vec{b})$ er produktet av lengdene r_1, r_2 og sinus til vinkelen mellom vektorene.

Vi ser at $\det(\vec{a},\vec{b})$ har samme fortegn som $\sin(v-u)$, dvs positiv hvis paret $\vec{a},\vec{b}$ er positivt orientert og negativ ellers.



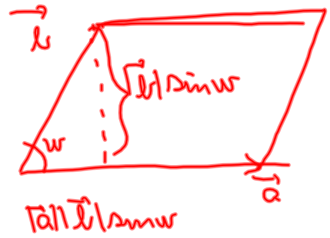
Derfor er $|\det(\vec{a},\vec{b})| = r_1r_2|\sin(v-u)|$ = arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

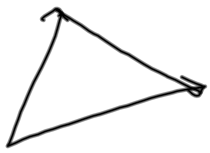
Setning: Fortegnet til $\det(\vec{a},\vec{b})$ angir orienteringen til paret $(\vec{a},\vec{b})$. Arealet til parallellogrammet utspent av $\vec{a},\vec{b}$ er

$$|\det(\vec{a},\vec{b})|,$$

og arealet til trekanten utspent av $\vec{a},\vec{b}$ er

$$\frac{1}{2}|\det(\vec{a},\vec{b})|.$$





Eksempel: Finn arealet av trekanten med hjørner i $(1,-1)$, $(2,3)$, $(4,2)$.

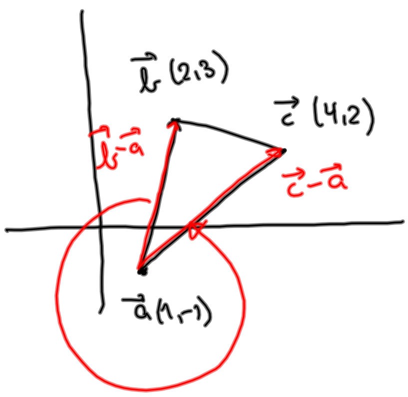
Må finne arealet av trekanten utspent av

$\vec{b}-\vec{a} = (2,3)-(1,-1) = (1,4)$

$\vec{c}-\vec{a} = (4,2)-(1,-1) = (3,3)$

$$\text{Areal av trekant} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}\right|$$

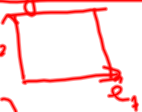
$$= \frac{1}{2}|1\cdot 3 - 4\cdot 3| = \frac{1}{2}|-9| = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$



Regneregler for 2×2-determinanter:

Geometrisk tolkning

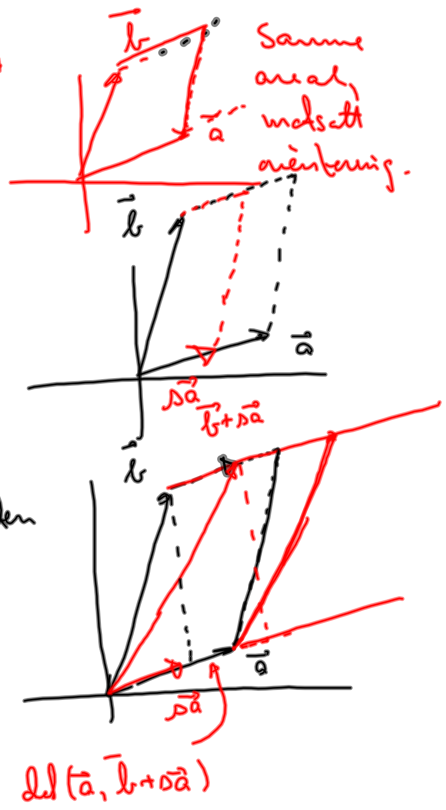
(i) $\det(I_2) = 1$ $\quad I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$



(ii) Dersom vi bytter om på linjene i determinanten, bytter determinanten fortegn, dvs $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a})$

(iii) Dersom ganger en linje i determinanten med et tall, endres determinanten med den samme faktoren (dvs $\det(s\vec{a}, \vec{b}) = s\det(\vec{a}, \vec{b})$ og $\det(\vec{a}, s\vec{b}) = s\det(\vec{a}, \vec{b})$)

(iv) Dersom dere adderer et multiplum av én rad til en annen, endrer ikke determinanten verdi (dvs $\det(\vec{a} + s\vec{b}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b})$ og $\det(\vec{a}, \vec{b} + s\vec{a}) = \det(\vec{a}, \vec{b})$).



3x3- determinanter

Def:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

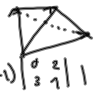
Eksempel.
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(0\cdot(-1) - 1\cdot 1) - 2(2(-1) - 1\cdot 3) + (-1)(2\cdot 1 - 0\cdot 3)$$
$$= -3 + 10 - 2 = \underline{\underline{5}}$$

Observasjon:
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$
$$= \underline{\vec{a} \times \vec{b}}$$

Dessuten ved en tilsvarende regning:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$
tallverdien til dette er volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

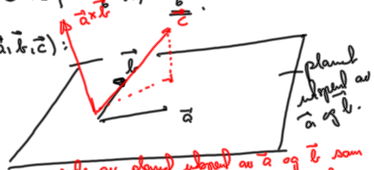
Setning: Volumet til parallellepipedet utspent av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er $|\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$. Volumet til pyramiden utspent av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er $\frac{1}{6}|\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Eksempel: Finn volumet til pyramiden utspent av



$\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 2, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, -2)$
$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left| 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{6}|-5 + 0 + 6| = \frac{1}{6}|1| = \underline{\frac{1}{6}}.$$

Orientering av $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:



Hvis $\vec{c}$ ligger på samme side av planet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som $\vec{a}\times\vec{b}$, så er $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ positivt orientert. Hvis $\vec{c}$ ligger på den andre siden av planet er $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ negativt orientert.

Faktum: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ er positivt orientert dersom $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ er positiv.

Regneregler:

a) $\det(I_3) = 1$

b) Dersom vi bytter om to linjer, bytter determinanten fortegn, f.eks. $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\det(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$

c) Dersom vi ganger en linje med et tall, endres determinanten med den samme faktoren, f.eks. $\det(\vec{a}, s\vec{b}, \vec{c}) = s\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

d) Dersom vi legger et multiplum av én linje til en annen, så skifter ikke determinanten verdi.
f.eks. $\det(\vec{a}, \vec{b} + 5\vec{c}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Hvordan kommer vi videre? 4×4, 5×5 osv.

1 1 1 1

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Eks

$$= a_1 \left(b_2 \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} \right) - a_2 \cdots$$