Funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$

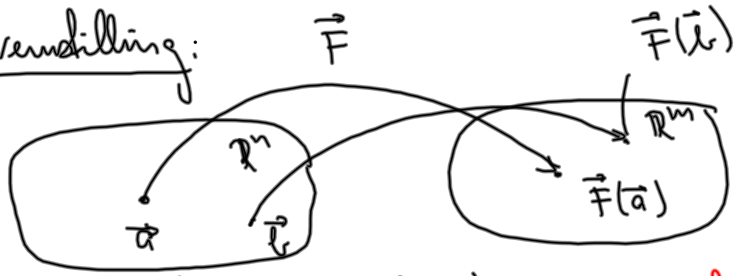
En funksjon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er en regel som til hver $x\in\mathbb{R}$ gir en verdi $y=f(x)\in\mathbb{R}$

En funksjon $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ er en regel som til hver $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ gir en verdi $\vec{y}\in\vec{F}(\vec{x})\in\mathbb{R}^m$.

Eksempel: Hvis $\vec{F}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, så vil vi til hver vektor $\vec{x}=(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4$, få en vektor $\vec{F}(\vec{x})=\vec{F}(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^3$, f.eks

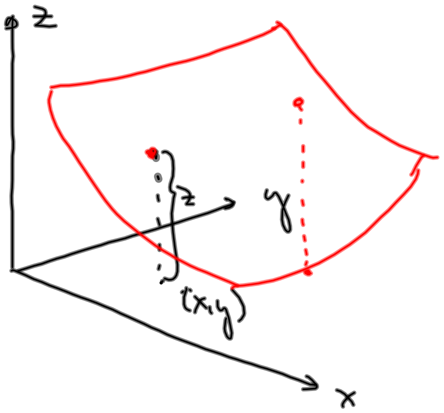
$$\vec{F}(x,y,z,u)=(x^2u+z\ ,\ e^{y+u}-x\ ,\ x-y+2zu\ )$$

Grafisk fremstilling:



Spesialtilfelle: $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=z$

Grafen danner en flate i rommet.



<u>Praktiske eksempler</u>

a) $T(x,y,z,t)$ = temperaturen i punktet (x,y,z) ved tiden t.

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

b) $\vec{V}(x,y,z,t)$ = $\underbrace{\text{vind (styrke og retning)}}_{\in \mathbb{R}^3}$ i punktet (x,y,z) ved tiden t.

$$\vec{V} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

c) Råvarer med priser $p_1, p_2, \dots, p_n$, lønnsutgifter: l, diverse produksjonsmetoder: q

Produksjonskostnaden: $K(p_1, p_2, \dots, p_n, l, q)$

$$K : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

<u>Observasjon:</u> Hvis $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, så

$$\vec{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

komponentfunksjonene til $\vec{F}$:

$F_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$F_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\vdots$
$F_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Funksjoner av typen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kalles ofte <u>skalarfelt</u>. Funksjoner av typen $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kalles <u>vektorfelt</u>.

Dersom $A \subset \mathbb{R}^n$, så er en funksjon

$$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$$

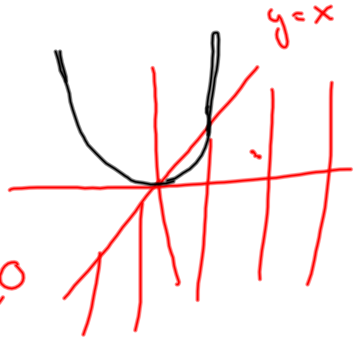
en regel som til hver $\vec{x} \in A$ gir oss en $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$.

Mengden A kalles <u>definisjonsområdet</u> til $\vec{F}$.

Ofte er definisjonsområdet underforstått som den største mengden der definisjonen gir mening:

<u>Eksempel</u>: Finn definisjonsområdet til

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \ln(x-y) \\ \frac{1}{x^2-y} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \longrightarrow x > y \\ \longrightarrow \underbrace{x^2 - y \neq 0}_{y = x^2} \end{matrix}$$



$$D_{\vec{F}} = \{(x,y) \mid x > y \text{ og } y \neq x^2\}$$

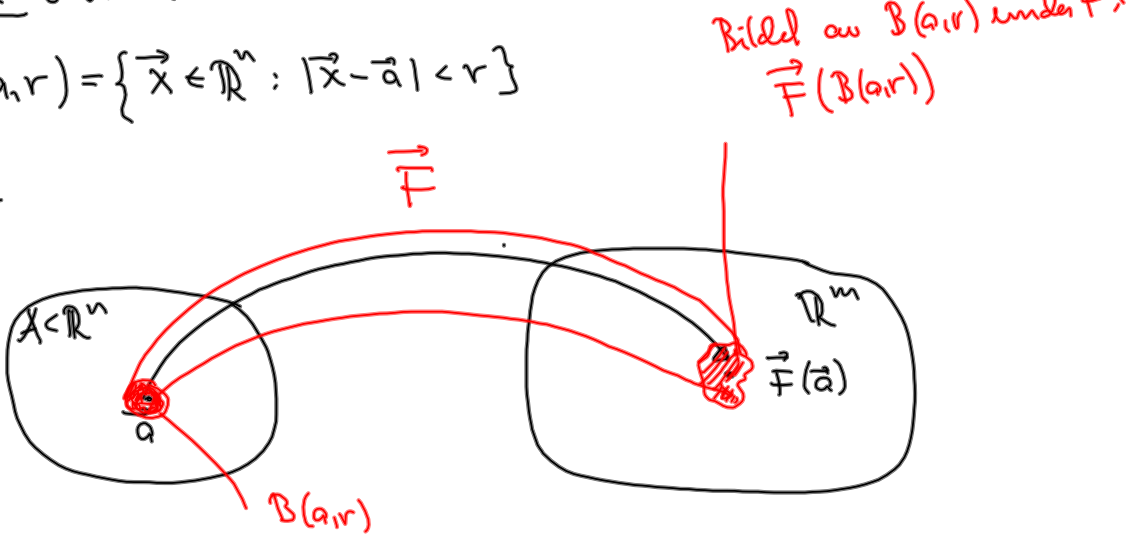
Avstanden mellom to punkter $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$d(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{y}-\vec{x}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2}$$

<u>Kulen</u> om $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ med radius r:

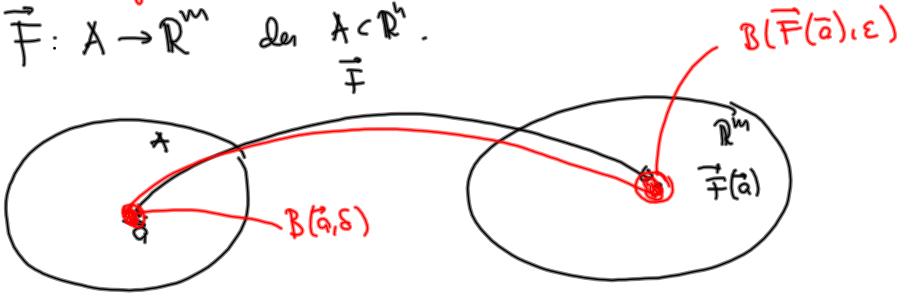
$$B(\vec{a},r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}-\vec{a}| < r\}$$

<u>Grafisk</u>



Kontinuerlige funksjoner (The Sequel: The return of ε and δ)

$\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ der $A \subset \mathbb{R}^n$.



Filosofi: Vi kan få $\vec{F}(\vec{x})$ så nær $F(\vec{a})$ vi måtte ønske ved å velge $\vec{x}$ tilstrekkelig nær $\vec{a}$.

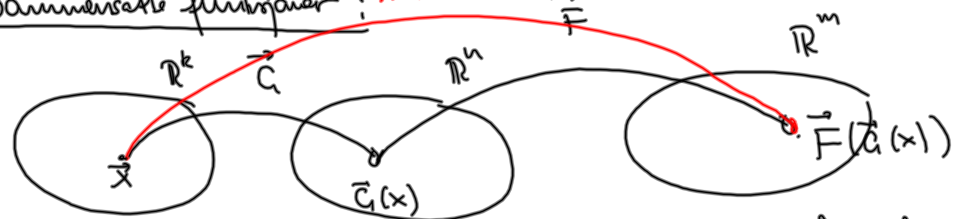
Definisjonen: $\vec{F}$ er kontinuerlig i punktet $\vec{a} \in A$ dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at vi har $\vec{x} \in A$ og

$$|\vec{x} - \vec{a}| < \delta,$$

så er $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon$.

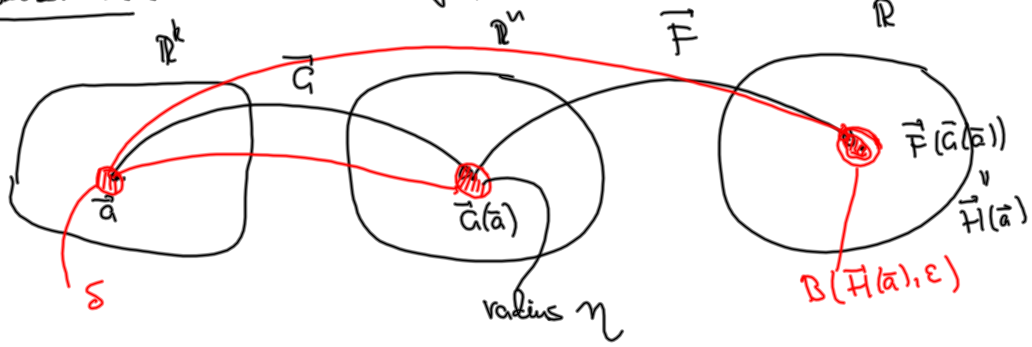
Setning: Dersom $\vec{F}, \vec{G}: A \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig i $\vec{a} \in A$, så er også $\vec{F} + \vec{G}$, $\vec{F} - \vec{G}$, $\vec{F} \cdot \vec{G}$, $c\vec{F}$ kontinuerlig i $\vec{a}$. Hvis $m = 3$, så er også $\vec{F} \times \vec{G}$ kontinuerlig i $\vec{a}$, og hvis $m = 1$, så er $\frac{F}{G}$ kontinuerlig i $\vec{a}$ forutsatt at $G(\vec{a}) \neq 0$.

Sammensatte funksjoner: $\vec{H}(x) = \vec{F}(\vec{G}(x))$



Setning: Dersom $\vec{G}$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ og $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{G}(\vec{a})$, så er $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ kontinuerlig i $\vec{a}$.

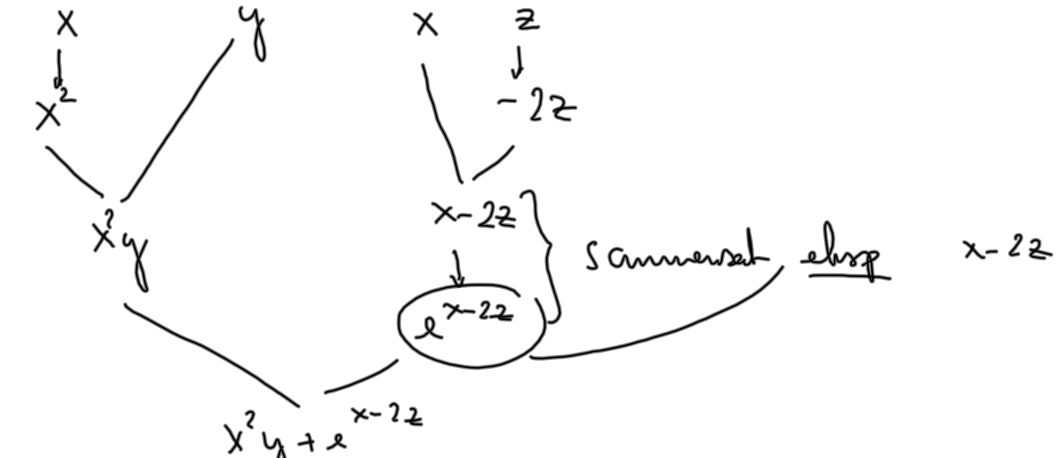
Bevisskisse (Onkel Tom tegner og forteller)



Kontinuitet i praksis:

Koordinatfunksjonene: $K_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_i$ kontinuerlige.

Eksempel: Vis at $f(x,y,z)=x^2y+e^{x-2z}$ er kontinuerlig.



Setning: Funksjonen $\vec{F}: A\to\mathbb{R}^m$ er kontinuerlig i $\vec{a}$ hvis og bare hvis hver koordinatfunksjon $F_1,F_2,\dots,F_m$ er kontinuerlig i $\vec{a}$

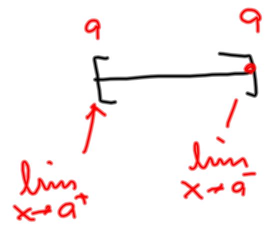
$$\vec{F}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}F_1(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n)\end{pmatrix}$$

Grenser

Grenser i $\mathbb{R}$:

To sidige grenser $\lim_{x \to a}$

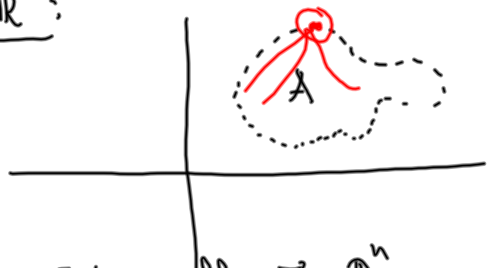
Ensidige grenser $\lim_{x \to a^+}$, $\lim_{x \to a^-}$



Grenser i $\mathbb{R}^n$:

$\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$

$\circ \in A$



$\lim_{x \to a} \vec{F}(x)$

Definisjon: Et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ er et opphopningspunkt for A dersom enhver kule $B(\vec{a}, r)$ $(r > 0)$ inneholder uendelig mange punkter fra A.

Definisjon: Anta at $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon og at $\vec{a}$ er et opphopningspunkt for A. Da er $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ grenseverdien av $\vec{F}(\vec{x})$ når $\vec{x}$ går mot $\vec{a}$ dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ og $\vec{x} \in A$, så er

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon.$$