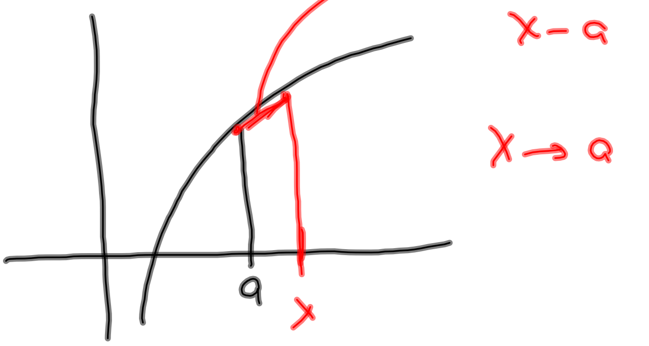
Derivasjon

Ideen:



Definisjon: Dersom

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

eksisterer, så sier vi at f er <u>deriverbar</u> i punktet a. I så fall holder vi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

for den <u>deriverte</u> til f i punktet a.

Alternative formuleringer

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad h = x - a}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Eksempel: Bruk definisjonen til å finne den deriverte til funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ i punktet a.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-\cancel{h}1}{a(a+h)}}{\cancel{h}\,1}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Siden dette gjelder generelt, er

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Derivasjonsregler:

$C' = 0$ (C er konstant)

$(x^a)' = a x^{a-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(f(x)-g(x))' = f'(x) - g'(x)$

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Eksempel: $f(x) = \overbrace{x^2}^{f(x)} \overbrace{\sin(e^x)}^{g(x)}$

$f'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2x\sin(e^x) + x^2\cos(e^x)\cdot e^x$

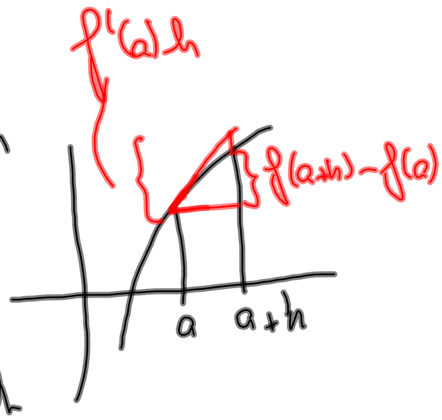
Hva betyr den deriverte:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Når h er "liten", er derfor

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \Big| \cdot h$$

$$\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{\text{Veksten}} \approx \underbrace{f'(a)h}_{\text{tilnærmet vekst}}$$



Eksempel: En kule har en radius på 5m. Hvor mye øker volumet når radius øker med 10 cm?

Volum av kule $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V'(r) = 4\pi r^2$

Eksakt tilvekst: $V(5.1) - V(5) = \frac{4}{3}\pi\, 5.1^3 - \frac{4}{3}\pi\, 5^3$

Tilnærmet: $V'(5)\, 0.1 = \underbrace{4\pi\, 5^2}_{100} \cdot 0.1 = 10\pi \approx 31.\, m^3$

Logaritmisk derivasjon: Vi har

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' f(x)$$

Bevis: $(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = (\ln|f(x)|)' f(x)$.

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln a^b = b \ln a$

Eksempel: $f(x) = \cos x^2 \, x^{e^x}$

$$\ln|f(x)| = \ln|\underbrace{\cos x^2}\,\underbrace{x^{e^x}}| = \ln|\cos x^2| + \ln|x^{e^x}|$$

$$= \ln|\cos x^2| + e^x \ln|x|$$

Deriverer: $(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2 \cdot 2x) + e^x \ln|x| + e^x \frac{1}{x}$

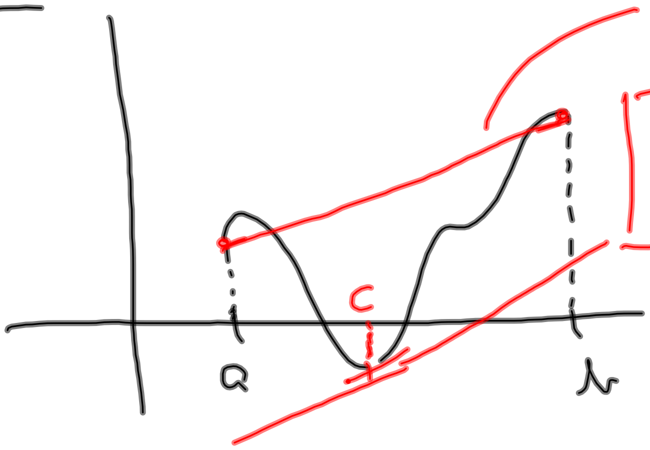
$$= -\frac{2x \sin x^2}{\cos x^2} + e^x\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' f(x) = \left(-\frac{2x \sin x^2}{\cos x^2} + e^x\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\right)\cos x^2 \, x^{e^x}.$$

Middelverdisetningen

Grafisk

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



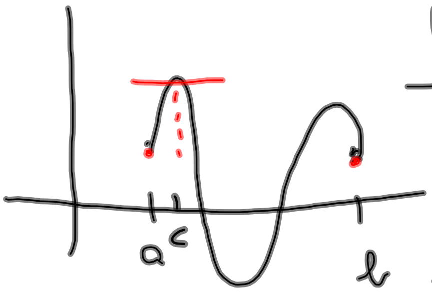
$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Middelverdisetningen: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig i hele $[a,b]$ og deriverbar i alle indre punkter $x\in(a,b)$. Da finnes det en $c\in(a,b)$ slik at

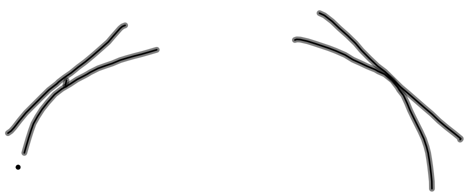
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

For å bevise denne setningen trenger vi en hjelpesetning:

Rolles teorem: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon som er deriverbar i (a,b). Dersom $f(a)=f(b)$, så finnes det en $c\in(a,b)$ slik at $f'(c)=0$.



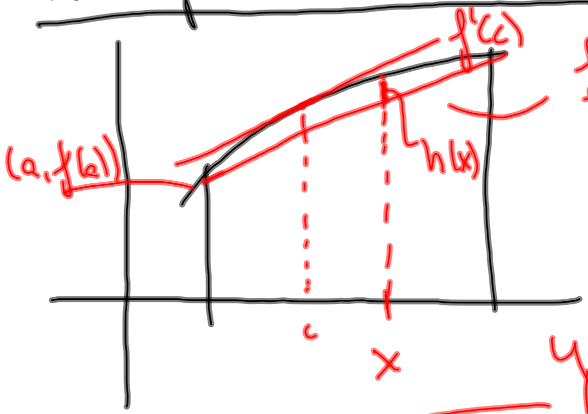
Bevisskisse: Ifølge ekstremalverdisetningen har f maks. og min. punkter på $[a,b]$. Hvis funksjonen er konstant, er $f'(x)=0$ i alle punkter, hvis ikke må funksjonen ha maks. eller min. i et indre punkt c. Siden f er deriverbar i c, må $f'(c)=0$.



Bevis for middelverdisetningen.

Det finnes en $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ligningen for sekanten:

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

Definerer: $h(x) = f(x) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)}$

$h(a) = 0$

$h(b) = 0$

Ifølge Rolle finnes det en $c \in (a,b)$ s.a. $h'(c) = 0$

Deriverer:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Altså:

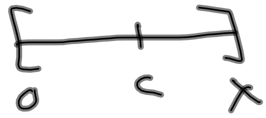
$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Eksempler:

Setning: Hvis $f'(x)=0$ for alle x, så er f konstant.

Bevis: Skal vise at $f(x)=f(0)$ for alle x. Middelverdisetningen sier:

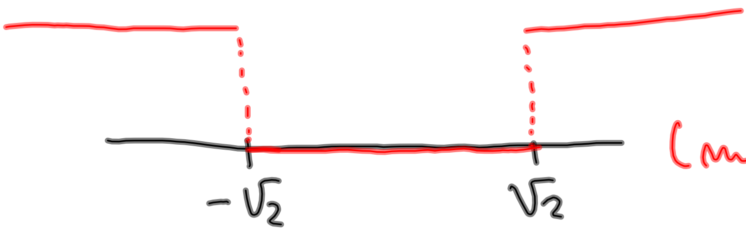
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underset{0}{\underset{\parallel}{f'(c)}} \text{ for en } c \text{ mellom } 0 \text{ og } x.$$



Altså $f(x)=f(0)$. Altså er funksjonen konstant lik $f(0)$.

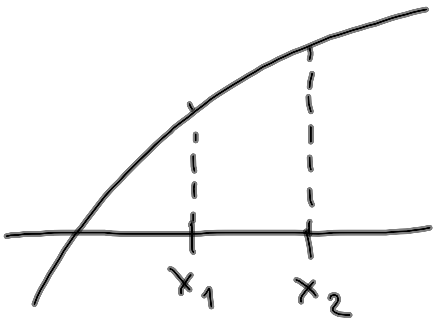
Advarsel: Hvis vi bare hadde arbeidet med $\mathbb{Q}$ så vil

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x^2>2 \\ 0 & \text{hvis } x^2<2 \end{cases}$$

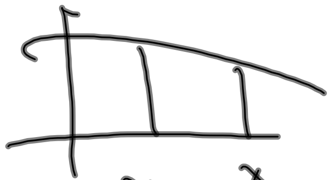


$f'(x)=0$ i alle rasjonale punkter (men ikke i $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$).

Definisjon: En funksjon f er <u>voksende</u> på et intervall I dersom $f(x_2) \geq f(x_1)$ for alle $x_2 \geq x_1$.



Tilsvarende sier vi at f er <u>avtagende</u> dersom $f(x_2) \leq f(x_1)$ for alle $x_2 \geq x_1$



Setning: Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig funksjon og at $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in (a,b)$. Da er f voksende på intervallet.

Bevis: Anta at $x_2 > x_1$. Da er

$$\frac{\overbrace{f(x_2)-f(x_1)}^{\text{pos}}}{\underbrace{x_2-x_1}_{\text{pos.}}} = \underbrace{f'(c)}_{\text{pos}} \geq 0 \quad \text{for en } c \in (x_1, x_2)$$

Dermed er $f(x_2)-f(x_1) \geq 0$, dvs $f(x_2) \geq f(x_1)$