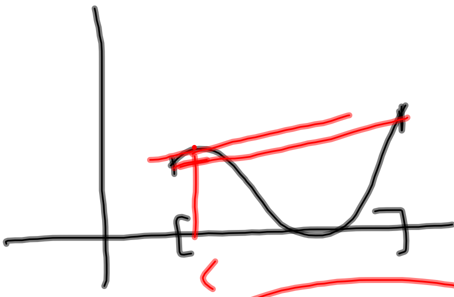
Husk:



$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Eksempel: Vis at $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2}$ for alle $x \ge -1$

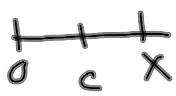
$f(x) = \sqrt{1+x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Bruker middelverdisetningen på intervallet fra 0 til x.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \text{ for en } c \text{ mellom } 0 \text{ og } x.$$

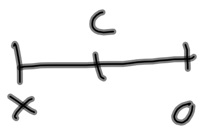
dvs $$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} \Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+c}}$$

Ser på tilfellet $x > 0$: $$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\underbrace{\sqrt{1+c}}_{>1}} < 1 + \frac{x}{2}$$



Tilfellet $x < 0$:

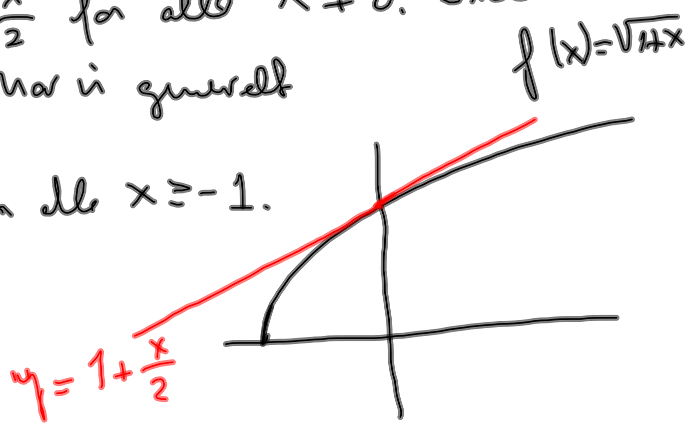
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\overset{\text{negativ}}{x}}{2\underbrace{\sqrt{1+c}}_{<1}} < 1 + \frac{x}{2}$$



Kladd: $$\frac{1}{\sqrt{1+c}} > 1 \overset{\frac{x}{2}}{\Rightarrow} \frac{x}{2\sqrt{1+c}} < \frac{x}{2}$$

Dermed må $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ for alle $x \neq 0$. Siden uttrykkene er like for $x = 0$, har vi generelt

$$\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{x}{2} \text{ for alle } x \ge -1.$$



L'Hôpitals regel

Problematisk grenseverdier:

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \to 0}{g(x) \to 0}$ "$\frac{0}{0}$"-uttrykk

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \to \infty}{g(x) \to \infty}$ "$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk.

$\lim_{x \to a} \underset{\to 0}{f(x)}\, \underset{\to \infty}{g(x)}$ "$0 \cdot \infty$"-uttrykk

$\lim_{x \to a} [\underset{\to \infty}{f(x)} - \underset{\to \infty}{g(x)}]$ "$\infty - \infty$"-uttrykk

$\lim_{x \to a} \underset{\to 1}{f(x)}^{g(x) \to \infty}$ "1^{∞}"-uttrykk

$\lim_{x \to} \underset{\to 0}{f(x)}^{g(x) \to 0}$ "0^0"-uttrykk.

Ingen generelle regler, alle eksempler krever individuell behandling.

L'Hopitals regel: Anta at

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

er enten begge 0 eller begge $\pm\infty$. Da er

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

forutsatt at den siste grenseverdien eksisterer (det er OK at den er ∞ eller $-\infty$).

Eksempel: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ "$\frac{0}{0}$"

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Eksempel: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x}$ "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty.$$

Noen ganger er det nødvendig å bruke L'hôpitals flere ganger:

Eksempel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ "$\dfrac{0}{0}$"

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

"$\dfrac{0}{0}$"

CAUCHY

For å bevise L'hôpitals regel trenger vi:

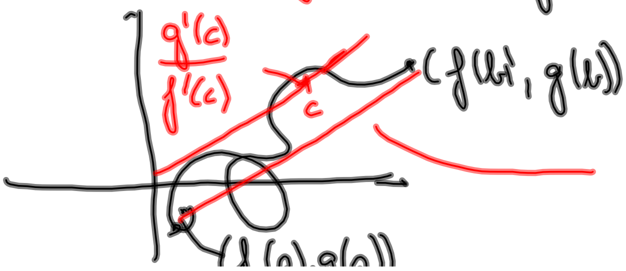
Cauchys middelverdisetning: Anta at $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i (a,b). Da finnes det en $c \in (a,b)$ der

$$(f(b)-f(a))\,g'(c) = (g(b)-g(a))\,f'(c)$$

dvs
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$$

Geometrisk tolkning: $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ $t \in [a,b]$



$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

<u>Bevis for Cauchys middelverdisetning:</u>

La
$$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$
En liten utregning viser at $h(a)=h(b)$. Ved Rolles teorem finnes det en c slik at $h'(c)=0$. Siden
$$h'(x) = (f(b)-f(a))g'(x) - (g(b)-g(a))f'(x)$$
betyr dette at
$$0 = h'(c) = (f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c)$$
dvs $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$. <u>HURRA!</u>

<u>Bevis</u> for L'Hôpitals regel for "$\frac{0}{0}$" når $a \in \mathbb{R}$.

Anta $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Vi skal vise at $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Vi har

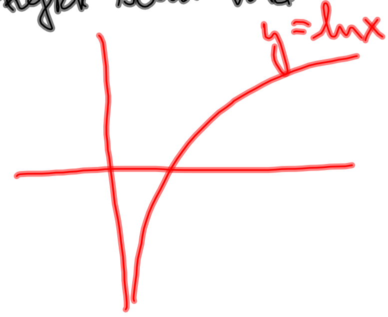
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \overset{0}{f(a)}}{\underbrace{g(x) - \underset{0}{g(a)}}_{}} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\frac{f'(c)}{g'(c)}$ for en c mellom x og a.

$$= \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

<u>HURRA!</u>

Eksempler på bruk av L'Hôpital på uttrykk som må omformes først.



$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0}\,\underbrace{\ln|x|}_{\to -\infty} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln|x|}^{\to \infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \pm\infty}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}(-x^2)}{-\frac{1}{x^2}(-x^2)} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

__Eksempel:__ $\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{e^{1/x}x}_{\to\infty} - \underbrace{x}_{\to\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\,(\overbrace{e^{1/x}-1}^{\to 0}) =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{e^{1/x}-1}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = \underline{1}$$

Eksempel: $\lim_{x\to 0} (\underbrace{\cos x}_{1})^{1/x^2 \to \infty} = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{e^{\ln\cos x}}_{\cos x}\Big)^{1/x^2}$

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2} \to ?}$

Mellomregning: $\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln \cos x}^{0}}{\underbrace{x^2}_{0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos x}}_{-1/2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{1} = -\frac{1}{2}.$

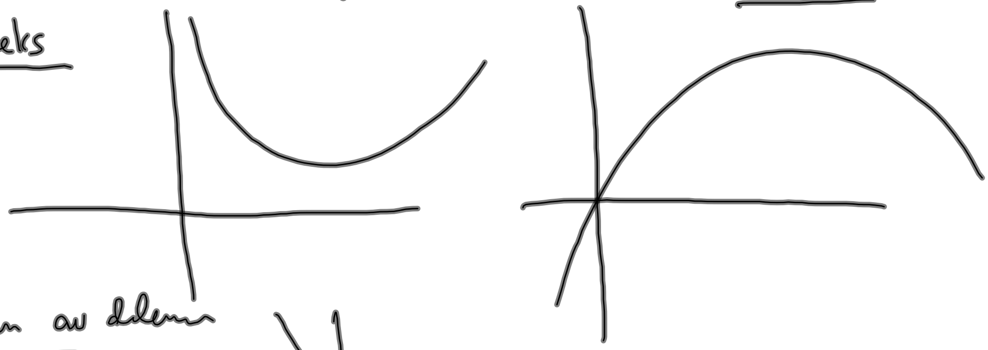
Tilbake: $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{x^2} \to -1/2} = \underline{\underline{e^{-1/2}}}$

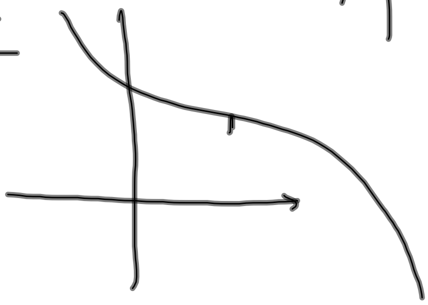
Kurvedrøfting

Konveks

konkav



Ingen av dem



Definisjon: Funksjonen f er konveks på intervallet I, dersom sekanten mellom to punkter $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $a, b \in I$ aldri stikker under funksjonsgrafen.

Setning: Anta at f er kontinuerlig på $[a,b]$ og at $f''(x) \geq 0$ (eller $f''(x) \leq 0$) for alle $x \in (a,b)$. Da er f konveks i $[a,b]$ (konkav i $[a,b]$).

ADVARSEL: $f(x) = 1 - x^{2/3}$ Konveks på $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$ men ikke konveks på hele $\mathbb{R}$.