Grenseverdier

Vi har definert

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b}$$

når $\vec{a}$ er et opphopningspunkt for $D_{\vec{F}}$

Hvis $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

så vil

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} F_i(\vec{x}) = b_i \text{ for alle } i.$$

Regneregler: Hvis $\vec{F}, \vec{G} : A \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a}$ er et opphopningspunkt for A og $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{B}$ og $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{G}(\vec{x}) = \vec{C}$, så

(i) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (\vec{F}(\vec{x}) + \vec{G}(\vec{x})) = \vec{B} + \vec{C}$

(ii) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (\vec{F}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{x})) = \vec{B} - \vec{C}$

(iii) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{G}(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \vec{C}$

(iv) Hvis $m = 1$ og $\vec{C} \neq 0$, så er $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\vec{F}(x)}{\vec{G}(\vec{x})} = \frac{\vec{B}}{\vec{C}}$.

Lite triks:

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

Eksempel: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 2xy^2}{x^2+y^2} =$

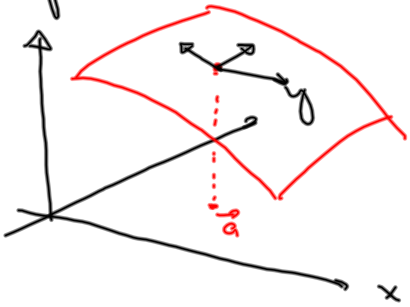
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^3\cos^3\theta + 2r^3\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{\underbrace{(x,y)\to(0,0)}_{r\to 0}} (r\cos^3\theta + 2r\cos\theta\sin^2\theta) = \underline{\underline{0}}$$

Derivasjon

Vi skal først se på derivasjon av skalarfelt

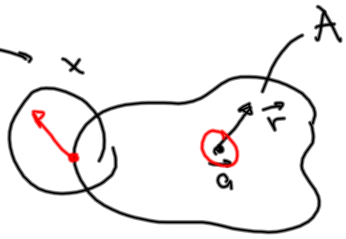
$f: A \to \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R}^n$.



"Stigningstallet til f i $\vec{a}$"

Forskjellig stigning i forskjellige retninger.

Retningsderivert:



Derivert i punktet $\vec{a}$ og retningen $\vec{r}$:

$f'(\vec{a}; \vec{r})$

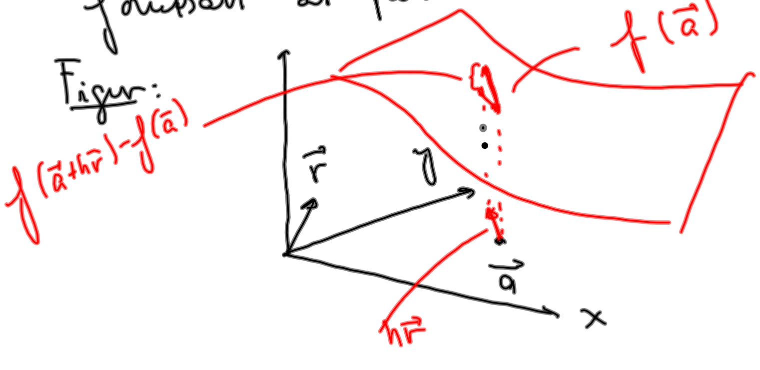
$\vec{a}$ kalles et indre punkt i A dersom det finnes en kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, om $\vec{a}$ som er inneholdt i A.

Definisjon: Anta $f: A \to \mathbb{R}$ og at $\vec{a}$ er et indre punkt i A. Den retningsderiverte i punktet $\vec{a}$ og retningen $\vec{r}$ er da definert som

$$f'(\vec{a}; \vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

forutsatt at grenseverdien eksisterer.

Figur:



Eksempel: Regn ut $f'(\vec{a};\vec{r})$ når $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{r}=(1,-1)$

og $f(x,y)=xy+2y$

$$f'(\vec{a},\vec{r})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}$$

Regner ut: $f(\vec{a})=f(2,3)=2\cdot 3+2\cdot 3=\underline{12}$

$$\vec{a}+h\vec{r}=(2,3)+h(1,-1)=(2+h,3-h)$$

$$f(\vec{a}+h\vec{r})=f(2+h,3-h)=(2+h)(3-h)+2(3-h)$$
$$=6-2h+3h-h^2+6-2h=12-h-h^2$$

Dermed

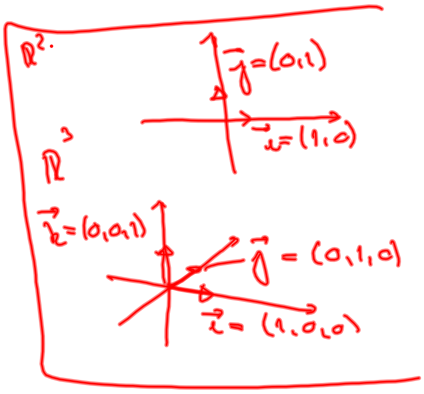
$$f'(\vec{a},\vec{r})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{12}-h-h^2)-\cancel{12}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-1-h)=\underline{\underline{-1}}$$

Kommentar: Greit her, men hva med mer kompliserte funksjoner?

Ønske: Mer effektive metoder!

Skal først se på hovedretningene

"Grunnenhetsvektorer"



$$\vec{e}_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\text{— i-te plass}$$

Skal se på $f'(\vec{a},\vec{e}_i)$

Partiell derivert:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = f(\vec{a}, \vec{e}_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$h\vec{e}_i = (0, \ldots, h, \ldots, 0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\cancel{a_1, a_2}, \ldots, a_i + h, \ldots, \cancel{a_n}) - f(a_1, \cancel{a_2}, \ldots, a_i, \ldots, \cancel{a_n})}{h}$$

= den deriverte av f m.h.p. x_i som om alle de andre var konstante

Eksempel: $f(x, y, z) = x^2yz + z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + 2z$$

Eksempel: $f(x,y,z) = xe^{x^2y} + \cos(yz)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\cdot e^{x^2y} + xe^{x^2y}\cdot 2xy + 0 = e^{x^2y} + 2x^2y\,e^{x^2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{x^2y}\cdot x^2 - \sin(yz)z = x^3e^{x^2y} - z\sin(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 - \sin(yz)\,y = -y\sin(yz)$$

Funksjonen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ har n partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ som måler stigningstall parallelt med aksene

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = f'(\vec{x}, \vec{e}_i)$$

Vektoren

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$$

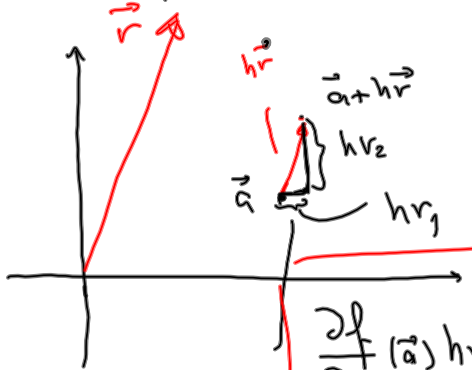
kalles <u>gradienten</u> til f i punktet $\vec{x}$.

I eksemplet:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(e^{x^2y} + 2x^2y\,e^{x^2y},\ x^3e^{x^2y} - z\sin(yz), -y\sin(yz)\right)$$

Gradienten kan brukes til å regne ut retningsderiverte.

Idé: $f(x,y)$, ønsker å finne $f'(\vec{a};\vec{r})$ der $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{r}=(r_1,r_2)$



$$\frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})hr_1+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})hr_2\approx f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}$$

Men da kan vi kanskje

$$f'(\vec{a},\vec{r})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})\cancel{h}r_1+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})\cancel{h}r_2}{\cancel{h}}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})r_1+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})r_2 = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Mistanke: Kanskje $f'(\vec{a};\vec{r})=\nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$?

Det viser seg at dette ikke holder for alle f, men for de fleste snille f man kommer borti i praksis.

hvem er det?

Hvilke f'er er snille?

Definisjon: Funksjonen f er deriverbar i punktet $\vec{a}$ dersom alle de partiellderiverte eksisterer og restleddet

$$\boxed{\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}}$$

går mot null fortere enn $\vec{r}$, dvs

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0$$

σ = sigma
Σ stor sigma

Setning: Dersom f er deriverbar i punktet $\vec{a}$, så er

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

$$f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(a)\cdot(h\vec{r}) = \sigma(h\vec{r})$$

dvs

$$f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})(h\vec{r}) + \sigma(h\vec{r})$$

Bevis: Vi har

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(h\vec{r}) + \sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(\cancel{h}\vec{r})}{\cancel{h}} + \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h\vec{r})}{h} = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h\vec{r})}{h|\vec{r}|}}_{=0}|\vec{r}|$$

$$= \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Setning: Dersom de partiellderiverte eksisterer i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er f deriverbar i $\vec{a}$.