Neste uke: Plenumsregning mandag
forelesning torsdag.

Elektronisk kursevaluering sendes ut på e-post i løpet av dag. Vennligst svar!

Deriverbarhet: Hvis restleddet

$$\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

går mot null fortere enn $\vec{r}$, dvs

$$\lim_{\vec{r}\to 0} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0$$

Setning: Hvis alle de partiellderiverte til f er definert i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er f deriverbar i $\vec{a}$.

Setning: Dersom f er deriverbar i $\vec{a}$, så er

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} \quad \text{for alle } \vec{r}.$$

Eksempel: La $f(x,y) = 3x^2y^3$ og beregn $f'(\vec{a};\vec{r})$ når $\vec{a} = (1,-2)$, $\vec{r} = (1,-1)$.

Deriverer f: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 9x^2y^2$

Siden de partiellderiverte er kontinuerlige, er f deriverbar og

$$f'(\vec{a},\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}.$$

Generelt: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (6xy^3, 9x^2y^2)$

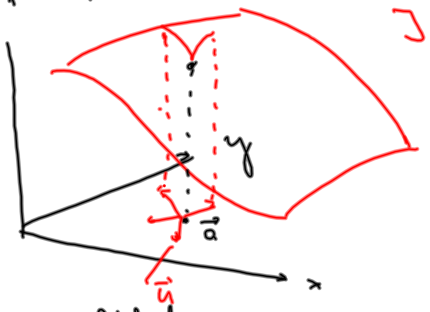
Spesielt

$$\nabla f(1,-2) = (6\cdot 1\cdot(-2)^3,\ 9\cdot 1^2\cdot(-2)^2) = (-48, 36)$$

Dermed

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(1,-2)\cdot\vec{r} = (-48,36)\cdot(1,-1) = -48-36 = \underline{\underline{-84}}$$

Tolkning av gradient: Hvis $\vec{u}$ er en enhetsvektor (dvs $|\vec{u}|=1$), så gir $f'(\vec{a};\vec{u})$ stigningstallet til funksjonen når vi starter i $\vec{a}$ og går i retning $\vec{u}$.



I hvilken retning stiger flaten brattest? stigningstall i retningen $\vec{u}$

$$f'(\vec{a};\vec{u}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{u} \le |\nabla f(\vec{a})|\cdot\underbrace{|\vec{u}|}_{=1} = |\nabla f(\vec{a})|$$

Schwarz' ulikhet:

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

Likhet hvis $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Altså er $f'(\vec{a};\vec{u}) \le |\nabla f(\vec{a})|$ med likhet når u og $\nabla f(\vec{a})$ peker i samme retning.

Setning: Anta at f er deriverbar i $\vec{a}$. Da stiger grafen til f raskest i den retningen som gradienten $\nabla f(\vec{a})$ peker og stigningstallet i denne retningen er $|\nabla f(\vec{a})|$.

Eksempel: La $f(x,y) = e^{xy^2}$

I hvilken retning vokser funksjonen brattest når vi står i punktet $\vec{a}=(3,1)$?

Må finne $\nabla f(\vec{a})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2}y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy^2}2xy, \quad \nabla f = (e^{xy^2}y^2, e^{xy^2}2xy)$$

$$\nabla f(3,1) = (e^{3\cdot1^2}\cdot1^2, e^{3\cdot1^2}\cdot2\cdot3\cdot1) = (e^3, 6e^3) = e^3(1,6)$$

Stigningstall i brattest retning $|\nabla f(3,1)| = \sqrt{(e^3)^2+(6e^3)^2} = e^3\sqrt{1+36} = \sqrt{37}\,e^3$.

Eksamensfelle: Flervalg med alternativer.

A $(1,-1)$
B $(2,3)$
C $(1,6)$
D $(-1,4)$
E (e,π^{14})

Eksamen

parallell

Del I: 30 poeng, 10 flervalg → andre del av pensum etter midtveis

Del II: 70 poeng, Ven ~~fatnskap~~ → hele pensum.

Annenordens partiellderiverte

En funksjon $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ har n partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Annenordens partiell deriverte har n^2 av:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Eksempel: $f(x,y) = 3x^3y^2$

Første ordens: $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y$

Annen ordens

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(9x^2y^2) = 18xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(9x^2y^2) = 18x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^3y) = 18x^2y$$

like?

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6x^3y) = 6x^3$$

Er det alltid slik at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \ ?$$

Nei, det går an å lage funksjoner slik at disse er ulike, men for funksjoner som dukker opp i praksis, er de like. Mer presist:

<u>Setning</u>: Dersom $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ eksisterer i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})$$

Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner

Spørsmål: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hvordan deriverer slike?

$$\vec{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Vi deriverer komponentfunksjonene: $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$

Disse partiellderiverte ordner vi i en Jacobi-matrise.

$$\vec{F}'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad m \times n\text{-matrise}$$

Eksempel: $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x+y^2 \\ x^2y^3 \\ 4xy \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & 2y \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 4y & 4x \end{pmatrix}$$ Jacobi-matrisen

Deriverbarhet: Vi sier at $\vec{F}$ er deriverbar i punktet $\vec{a}$ dersom restleddet

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) - \vec{F}'(\vec{a})\vec{r}$$

går mot null raskere enn $\vec{r}$, dvs

$$\lim_{\vec{r}\to 0} \frac{\vec{\sigma}(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0$$

Setning: $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ hvis og bare hvis hver komponentfunksjon F_i er deriverbar i $\vec{a}$. Spesielt er $\vec{F}$ deriverbar dersom alle partiellderiverte

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$ ← komponentene i Jacobi-matrisen

eksisterer i en omegn rundt $\vec{a}$ og er kontinuerlig i $\vec{a}$.

Essensen i deriverbarhet: For små $\vec{r}$ er

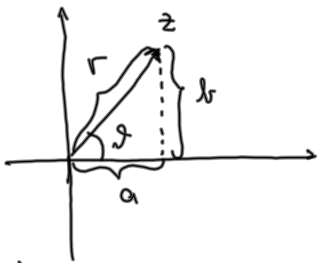
$$\vec{F}'(\vec{a})\vec{r}$$

en svært god tilnærming til

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a})$$

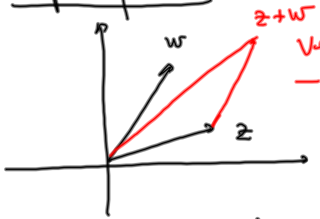
Slutt på pensum!

Repetisjon
Komplekse tall

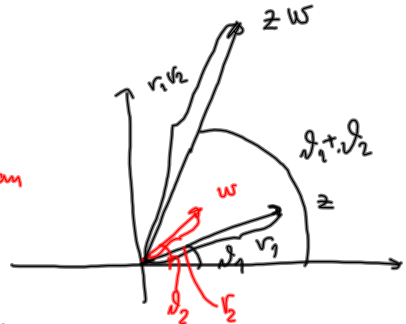


$$z = \underbrace{a+ib}_{\text{kartesisk form}} = \overbrace{r\cos\vartheta + i\,r\sin\vartheta}^{\text{polarform}}$$
$$= r e^{i\vartheta}$$
eksponentiell form.

Operasjoner:



vektoraddisjon
—"— subtraksjon

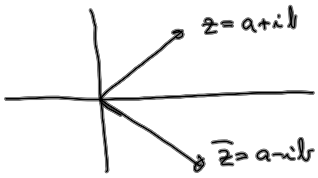


Triks: $z = a+ib$, $w = c+id$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{\underbrace{(c+id)(c-id)}_{c^2+d^2}}$$
$$= \frac{ac - iad + ibc + bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Konjugasjon.

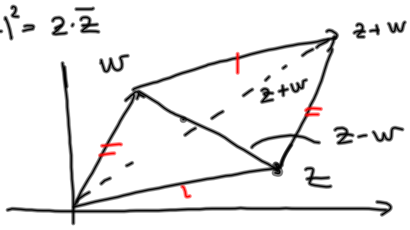
$$z = a+ib$$
$$\bar z = a-ib$$



$$z\cdot\bar z = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$$

Altså
$$|z|^2 = z\cdot\bar z$$

Eksempel:



Vis at
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

(summen av kvadratene av diagonalene er lik summen av kvadratene av sidene)

Bevis: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)}$

$$= (z+w)(\bar z+\bar w) + (z-w)(\bar z-\bar w)$$
$$= z\bar z + \cancel{z\bar w} + \cancel{\bar z w} + w\bar w + z\bar z - \cancel{z\bar w} - \cancel{\bar z w} + w\bar w$$
$$= 2z\bar z + 2w\bar w = \underbrace{2|z|^2 + 2|w|^2}$$

De Moivres formel:
$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$$

Eksempel: $(2+2i)^{17} = \ldots$

Bevis:
$$\underbrace{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}_{e^{i\vartheta}}{}^n = \underbrace{(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}} = \cos n\vartheta + i\sin n\vartheta$$