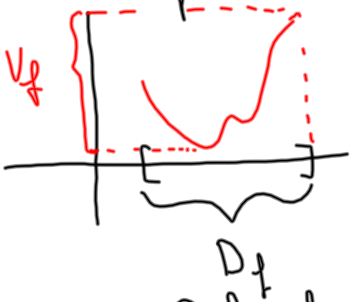
Eksempel: $f(x) = e^x + x^3$ Vis at denne er injektiv:

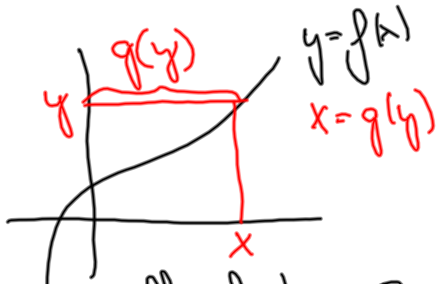
$f'(x) = e^x + 3x^2 > 0 \Rightarrow f$ er strengt voksende, altså injektiv.

Husk: D_f = definisjonsmengden til $f = \{x : f(x) \text{ er definert}\}$

V_f = verdimengden til $f = \{f(x) : x \in D_f\}$



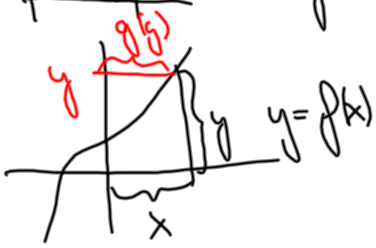
$f : D_f \to V_f$



Definisjon: Anta at $f : D_f \to V_f$ er en injektiv funksjon. For hver $y \in V_f$, finnes det da nøyaktig én $x \in D_f$ slik at $y = f(x)$. Denne x'en kalles $g(y)$. Denne g'en er en funksjon

$$g : V_f \to D_f,$$

og kalles den omvendte (inverse) funksjonen til f. Av og til betegnes den med f^{-1}.



Eksempel: Funksjonen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen

$$f(x) = e^{2x} + 3$$

Vis at f er injektiv og finn den omvendte funksjonen.

$f'(x) = 2e^{2x} > 0$, f er strengt voksende, altså injektiv.

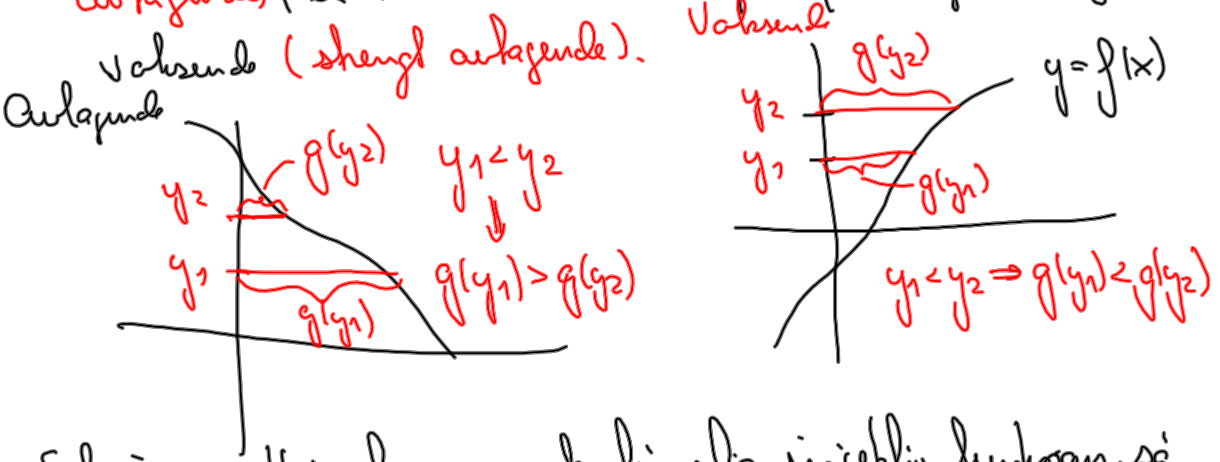
$y = f(x) \Rightarrow$ løser for x, $(x = g(y))$

$$y = e^{2x} + 3 \Rightarrow e^{2x} = y - 3 \Rightarrow 2x = \ln(y-3) \Rightarrow x = \frac{\ln(y-3)}{2}$$

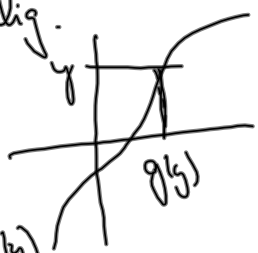
Omvendt funksjon: $g(y) = \dfrac{\ln(y-3)}{2}$

Viktig problemstilling: Hvordan får vi informasjon om den omvendte funksjonen $x = g(y)$ når vi ikke kan løse $y = f(x)$?

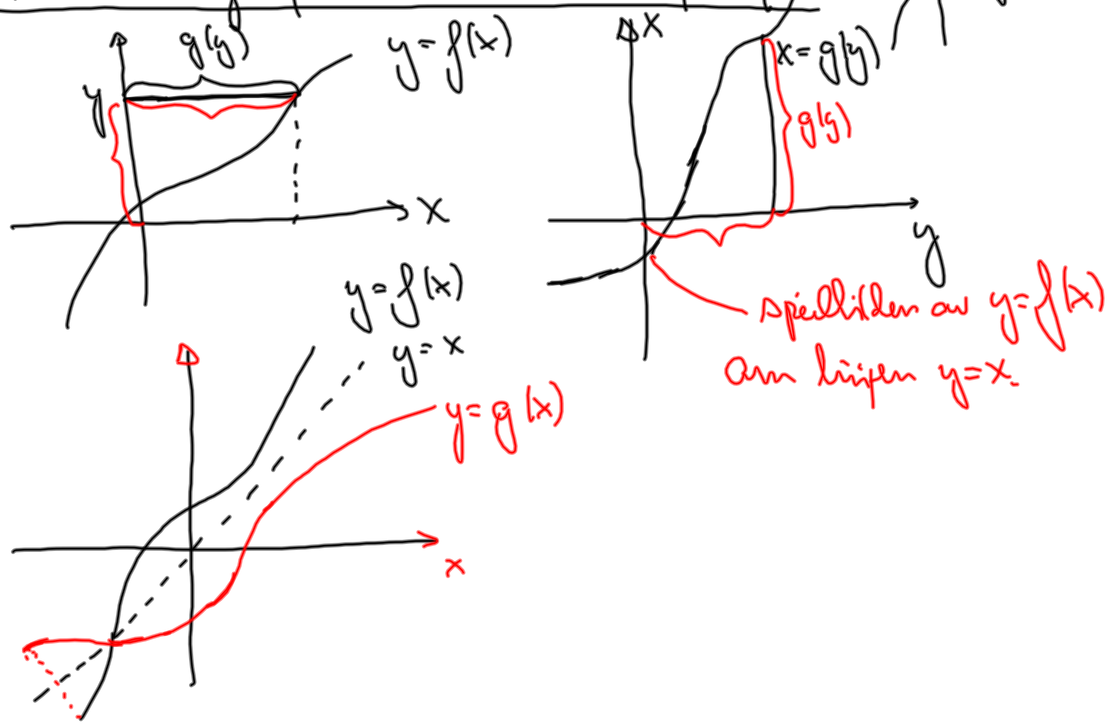
Setning: Hvis f er en strengt voksende funksjon (strengt avtagende), så er den omvendte funksjonen også strengt voksende (strengt avtagende).

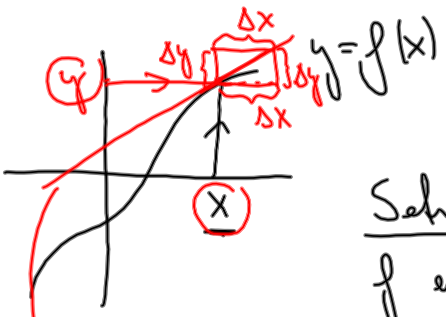


Setning: Hvis f er en kontinuerlig, injektiv funksjon, så er den omvendte funksjonen også kontinuerlig.



Hvordan er grafen til en omvendt funksjon?





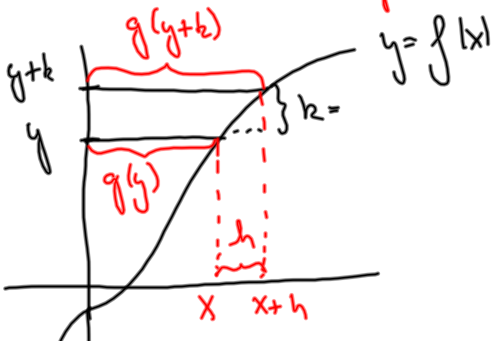
hvis jeg kjenner f', kan jeg da finne g'?

$f'(x)$ er stigningstallet til tangenten $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$g'(y)$ er stigningstallet til tangenten $= \frac{\Delta x}{\Delta y}$

<u>Setning</u>: Anta at den injektive funksjonen f er deriverbar i punktet x og at $f'(x) \neq 0$. Da er den omvendte funksjonen g deriverbar i punktet $y = f(x)$ og

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$



$f(x) = y \quad f(x+h) = y+k$

<u>Bevis</u>: $g'(y) = \lim\limits_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x+h)-f(x)}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$$

$k \to 0$

$\downarrow$

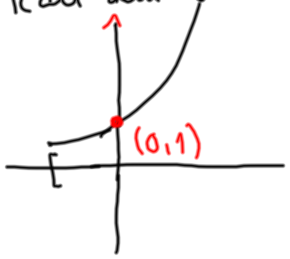
$h \to 0$

Eksempel: Funksjonen $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$ definert ved
$f(x) = xe^{x} + 1$ er injektiv med omvendt funksjon g.

Finn $g'(1)$.

Sjekker at f er injektiv: $f'(x) = 1e^{x} + xe^{x} + 0 = \underbrace{(1+x)e^{x}}_{\text{positiv på } [-1,\infty)}$.

Kall den omvendte funksjonen for g.

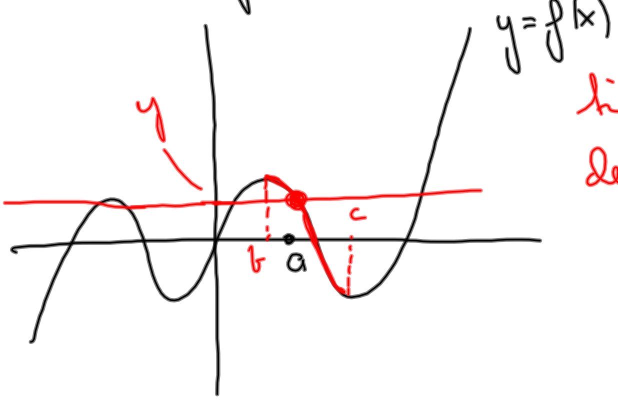


$f(0) = 0e^{0} + 1 = 1$

$g'(1) = \dfrac{1}{f'(0)}$ fordi $1 = f(0)$

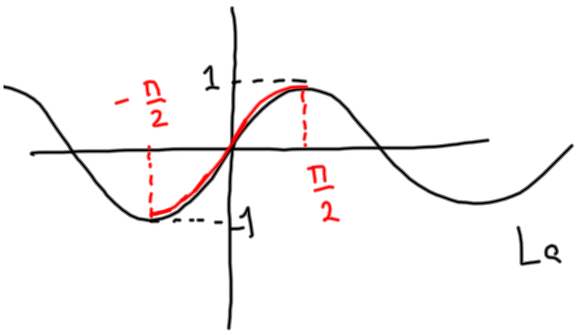
$= \dfrac{1}{(1+0)e^{0}} = \underline{\underline{1}}$

Hva hvis f ikke er injektiv?



Innskrenker vi funksjonen til intervallet $[b,c]$, så er den avtagende og dermed injektiv.

Arcus funksjoner:



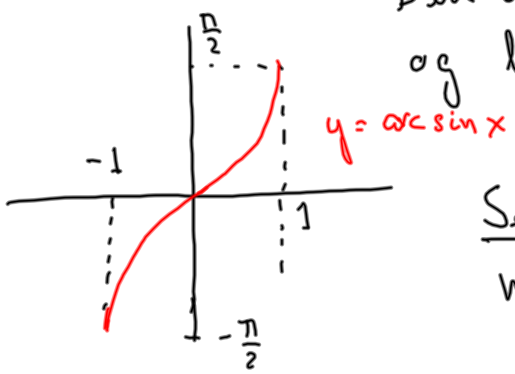
$y = \sin x$

Le $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ være gitt ved

$f(x) = \sin x$.

Den omvendte funksjonen kalles <u>arcussinus</u> og betegnes med

$x = \arcsin y$



<u>Lommeregner:</u>

$\arcsin x = \sin^{-1}(x)$

$\boxed{\text{7.5 cotangens: Les selv } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}}$

<u>Setning:</u> arcussinus er deriverbar i $(-1,1)$ med

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

<u>Bevis:</u> For $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $y = \underbrace{\sin x}_{f(x)} \Rightarrow x = \underbrace{\arcsin y}_{g(y)}$

<u>Generelt:</u> $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

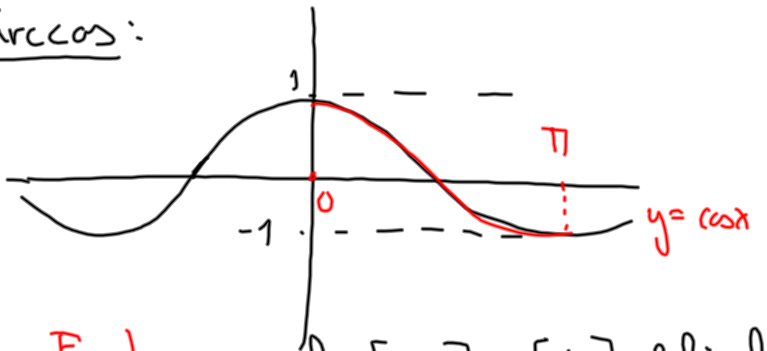
<u>Altså</u> $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

<u>dvs</u> $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Integrasjon:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

Arccos:

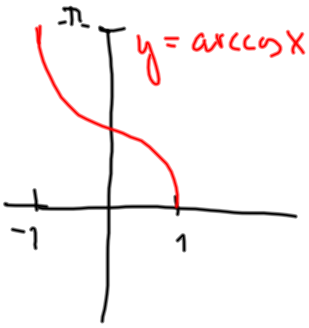


Funksjonen: $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definert ved

$$y = \cos x$$

har en omvendt funksjon $g : [-1, 1] \to [0, \pi]$ som kalles arcuscosinus og betegnes ved

$$x = \arccos y.$$



$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$