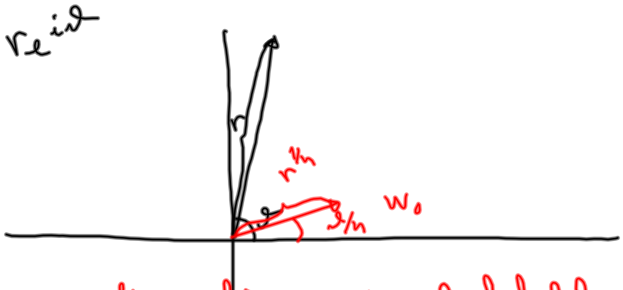
Regnelørdag / prøveeksamen: Påmelding før 15^{00} i dag.

Oblig2 løsning lagt ut.

Evalueringsskjema: Ja takk!

Komplekse n-te røtter

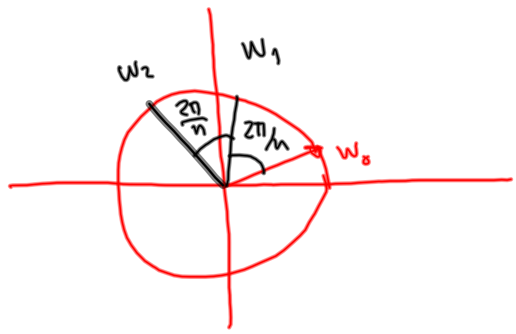
$z = re^{i\theta}$



Grunnleggende rot.

$w_0 = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}$

Resten av røttene finner vi ved likedeling:



$w_0 = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}$

$w_1 = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}$

$w_2 = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right)}$

$\vdots$

w_{n-1}

Algebraens fundamentalteorem

Et n-te gradspolynom (komplekst)

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

kan alltid faktoriseres i komplekse førstegradsfaktorer

$$P(z) = c_n (z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)$$

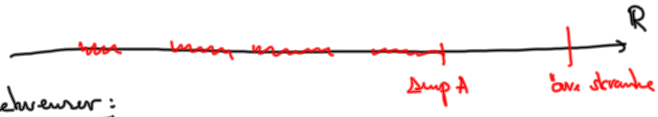
Alternativt: n-te gradsligningen $P(z)=0$ har nøyaktig n komplekse røtter når vi regner med multiplisitet.

Hvis $P(z)$ er et reelt polynom, kommer de komplekse røttene i konjugerte par (dvs at hvis $1+2i$ er en rot, så er $1-2i$ det også), og $P(z)$ alltid faktoriseres i reelle første- og annengradsuttrykk):

$$P(z) = c_n \underbrace{(z-r_1)\cdot \dots}_{\text{førstegrad}} \underbrace{(z^2+a_1z+b_1)\dots}_{\text{annengrad}}$$

Den teoretiske biten

Kompletthetsprinsippet: Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke, $\sup A$.

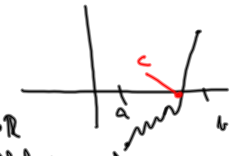


Konsekvenser:

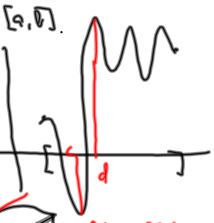
Teorem 1: Enhver voksende, begrenset følge konvergerer.

Teorem 2 (Skjæringssetningen): Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn, så finnes det en $c\in(a,b)$ slik at $f(c)=0$.

Bruksområde: Vis at f har et nullpunkt ...

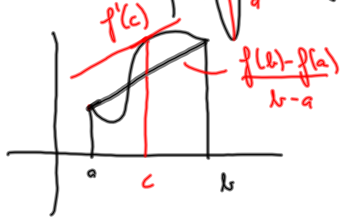


Teorem 3 (Ekstremalverdisetningen): Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall, så har f maks og min. punkter i $[a,b]$.



Teorem 4 (Middelverdisetningen): Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar i alle indre punkter $x\in(a,b)$, så finnes det et punkt $c\in(a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



Eksempel (fra Oblig 2):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan x}{x} & \text{for } x\neq 0\\ 1 & \text{for } x=0\end{cases}$$

Er f voksende for $x>0$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{1+x^2}x-\arctan x}{x^2}$$

fortegn? må sjekke fortegn.

positiv

Må sjekke fortegnet til:

$\arctan x-\frac{1}{1+x^2}x$. dvs $\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{1+x^2}$

Ved middelverdisetningen brukt på funksjonen $g(x)=\arctan x$ over intervallet $[0,x]$, får vi

$$\frac{\arctan x-\arctan 0}{x-0}=\frac{1}{1+c^2} \quad \text{der } 0<c<x.$$

$$\frac{\arctan x}{x}=\cancel{\frac{1}{1+c^2}}>\frac{1}{1+x^2} \quad \text{siden } x>c$$

Siden $x>0$:

$$\arctan x>\frac{x}{1+x^2}$$

Siden $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}<0$, f er altså avtagende.

Kontinuitet:

Def: f er kontinuerlig i a dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $|x-a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

I praksis:

(i) Bruke at kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige der de er definert.

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Eksempel:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Vis at f er kont.

For $x \neq 0$, er $f(x)$ en brøk av to kontinuerlige funksjoner og derfor selv kontinuerlig.

For $x = 0$: Må sjekke at $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1 = f(0).$$

Grenseverdier: L'Hôpitals regel pluss triks:

(i) Faktoriser ut høyeste faktor:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-7+5x^5}{3-2x^5-7x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^5}\left(\frac{3}{x}-\frac{7}{x^5}+5\right)}{\cancel{x^5}\left(\frac{3}{x^5}-2-\frac{7}{x^2}\right)} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

(ii) Multiplikasjon med den konjugerte:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

L'Hôpitals regel

Grunnform

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Forutsetninger:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$$

og $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksisterer (det er OK med $\pm\infty$).

Andre former: "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "1^∞", "0^0" som kan omformes slik at L'Hôpital kan brukes.

Eksempel:

$$\lim_{x\to\infty} (\underbrace{1+\sin\tfrac{1}{x}}_{\to 1})^{x \to \infty} = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln(1+\sin\frac{1}{x})}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\sin\frac{1}{x})} = e^1 = e$$

Mellomregning:

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\infty}\, \underbrace{\ln\left(1+\sin\tfrac{1}{x}\right)}_{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$u=\frac{1}{x}$, $x\to\infty \Downarrow u\to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+\sin u)}{u} \overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{1+\sin u}\cdot\cos u}{1} = 1$$

Derivasjon og kurvedrøfting

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

I praksis: derivasjonsregler, men .....

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

For $x \neq 0$: $\left(\frac{\arctan x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x - \arctan x \cdot 1}{x^2} = \dots\ ..$

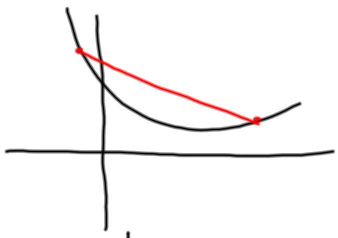
For $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\arctan x}{x} - 1}{x}$$

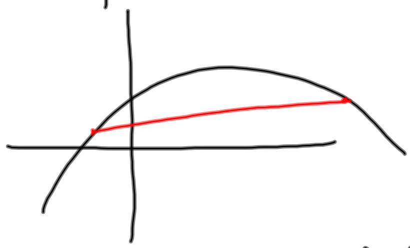
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x^2)^2}2x - \cancel{0}}{2} = \underline{\underline{0}}$$

Konveks/konkav:

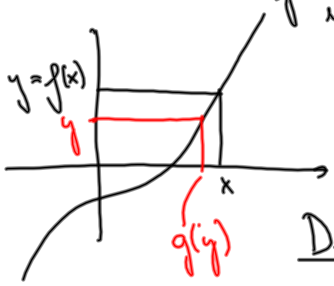


$$f''(x) \geq 0 \text{ for alle } x \in I$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ er konveks i } I.$$



$$f''(x) \leq 0 \text{ for alle } x \in I$$
$$\Downarrow$$
$$f \text{ er konkav i } I.$$

Omvendte funksjoner



f injektiv funksjon

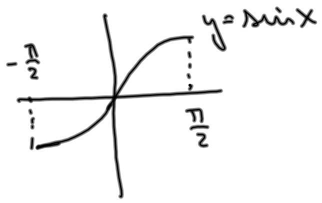
g omvendt funksjon av f

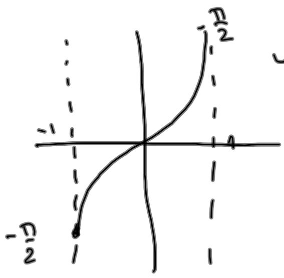
$$g(y) = x \iff y = f(x)$$

Derivasjon:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{der } y = f(x),\ x = g(y)$$

Arcusfunksjoner:

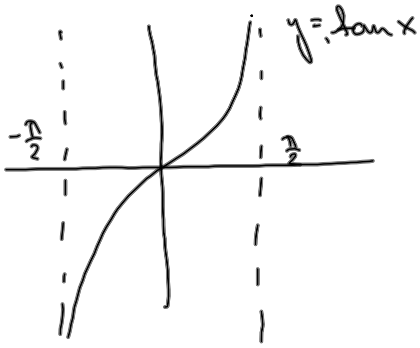


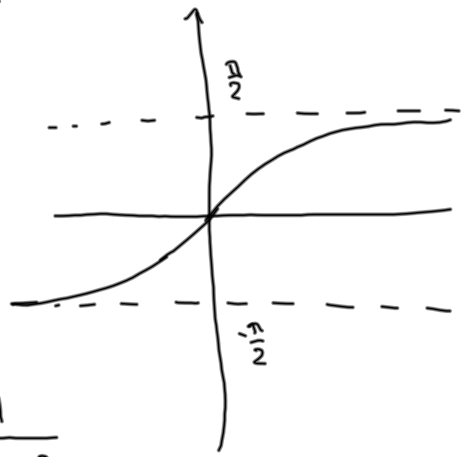


$y = \arcsin x$

$$y = \sin x \iff x = \arcsin y \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$





$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$