MAT 1100: Obligatorisk oppgave 1, H-11: Løsningsforslag

Oppgave 1: a) Vi har

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

Videre er $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Siden z ligger i annen kvadrant, betyr dette at $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

b) Siden $z = re^{i\theta} = 4e^{\frac{2\pi i}{3}}$, er

$$z^{22} = \left(4e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^{22} = 4^{22}e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot 22} = 2^{44}e^{\frac{44\pi i}{3}}$$

Vi har $\frac{44}{3} = 14 + \frac{2}{3}$, og siden $e^{i\theta}$ er periodisk med periode 2π, er dermed

$$e^{\frac{44\pi i}{3}} = e^{14\pi i}e^{\frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dermed er

$$z^{22} = 2^{44}e^{\frac{44\pi i}{3}} = 2^{44}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -22^{43} + i22^{43}\sqrt{3}$$

Oppgave 2: a) Vi må vise at $P(2+i) = 0$:

$$P(2+i) = (2+i)^3 - 2(2+i)^2 - 3(2+i) + 10 =$$
$$= (2^3 + 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2i^2 + i^3) - 2(4 + 4i + i^2) - 6 - 3i + 10 =$$
$$= 8 + 12i - 6 - i - 8 - 8i + 2 - 6 - 3i + 10 = 0$$

b) Siden polynomet er reelt, må det konjugerte tallet $2-i$ også være en rot. Vi dividerer $P(z)$ på produktet

$$(z - (2+i))(z - (2-i)) = z^2 - 4z + 5$$

og får

$$\frac{P(z)}{z^2 - 4z + 5} = z + 2$$

Dette viser at -2 er den tredje og siste roten.

c) Den reelle faktoriseringen er

$$P(z) = (z+2)(z^2 - 4z + 5)$$

og den komplekse

$$P(z) = (z+2)(z - (2+i))(z - (2-i))$$

Oppgave 3: Observer at $|z+2| = |z-(-2)|$ er avstanden mellom punktene z og -2, mens $|z+2i| = |z-(-2i)|$ er avstanden mellom punktene z og $-2i$. Oppgaven ber oss finne de punktene z der den første avstanden er mindre enn den andre.

Midtnormalen til punktene -2 og $-2i$ er linjen $y = x$ (lag en figur). Punktene som ligger over denne linjen er nærmere -2 enn $-2i$, og det er derfor området over linjen $y = x$ vi er på jakt etter.

Oppgave 4: La oss sette $h = x - a$. Da er $x = a + h$, og vi får

$$|f(x) - f(a)| = |f(a+h) - f(a)| = |2(a+h) + 1 - (2a+1)| = 2|h|$$

For å få dette uttrykket mindre enn ϵ, må vi sørge for å få $|h| < \frac{\epsilon}{2}$. Det får vi ved å velge $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Hvis $|h| = |x - a| < \delta$, har vi nemlig da

$$|f(x) - f(a)| = 2|h| < 2\delta = 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Oppgave 5: La $g(x) = x^2$. Da er er $g(-1) > f(-1)$, mens $g(0) < f(0)$. Ifølge korollar 5.2.2 finnes det da en $x \in (-1, 0)$ slik at $f(x) = g(x) = x^2$. Tilsvarende er $g(0) < f(0)$ mens $g(1) > f(1)$, og dermed finnes det også en $x \in (0, 1)$ slik at $f(x) = g(x) = x^2$.