UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	10. januar 2008
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent lommeregner

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Kortfattet løsningsforslag

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x,y) = y\cos(xy)$?

Svar: $\cos(xy) - xy\sin(xy)$. Begrunnelse: Produktregel og kjerneregel.

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x,y,z) = xz + y^2$ raskest i punktet $(1,2,-3)$?

Svar: $(-3,4,1)$. Begrunnelse: $\nabla f(x,y,z) = (z, 2y, x)$, så $\nabla f(1,2,-3) = (-3,4,1)$.

3. (3 poeng) Hva er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a},\mathbf{r})$ til $f(x,y) = x\ln(xy)$ når $\mathbf{a} = (e,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,2)$?

Svar: $-2+2e$. Begrunnelse: $\nabla f(x,y) = (\ln(xy)+1, \frac{x}{y})$, så $\nabla f(e,1) = (2,e)$. Dermed er $f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = (2,e)\cdot(-1,2) = -2+2e$

4. (3 poeng) Hvis $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, så er $A\mathbf{x}$ lik:

Svar: $\begin{pmatrix} -6 \\ -22 \end{pmatrix}$

5. (3 poeng) Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ er:

(Fortsettes på side 2.)

Svar: 17. Begrunnelse:

$$\text{areal} = |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right| = |2 \cdot (-4) - 3 \cdot 3| = |-17| = 17$$

6. (3 poeng) En pyramide har hjørner i punktene $(2,1,3)$, $(4,2,2)$, $(3,4,2)$ og $(3,2,6)$. Volumet er:

Svar: 3. Begrunnelse: Setter vi $\mathbf{a} = (2,1,3)$, $\mathbf{b} = (4,2,2)$, $\mathbf{c} = (3,4,2)$ og $\mathbf{d} = (3,2,6)$, er pyramiden utspent av vektorene:

$$\mathbf{a} - \mathbf{d} = (-1,-1,-3), \quad \mathbf{b} - \mathbf{d} = (1,0,-4), \quad \mathbf{c} - \mathbf{d} = (0,2,-4)$$

Dermed er

$$\text{volum} = \frac{1}{6}|\det(\mathbf{a} - \mathbf{d}, \mathbf{b} - \mathbf{d}, \mathbf{c} - \mathbf{d})| = \frac{1}{6} \cdot |-18| = 3$$

7. (3 poeng) Jacobi-matrisen til funksjonen $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ e^{xy^2} \end{pmatrix}$ er:

Svar: $\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2e^{xy^2} & 2xye^{xy^2} \end{pmatrix}$. Begrunnelse: Partiellderivér og husk kjerneregelen i nederste linje.

8. (3 poeng) Når vi skal delbrøkoppspalte $\frac{2x^2-3}{(x-1)(x^2+3x+10)^2}$, setter vi uttrykket lik:

Svar: $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+10} + \frac{Dx+E}{(x^2+3x+10)^2}$. Begrunnelse: Se reglene for delbrøkoppspalting.

9. (3 poeng) Volumet til omdreiningslegemet vi får når vi dreier $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, om y-aksen, er:

Svar: $2\pi^2$. Begrunnelse: Volum $= 2\pi \int_0^\pi x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\,dx$. Bruker vi delbrøkoppspalting med $u = x$, $v' = \sin x$, får vi $u' = 1$, $v = -\cos x$, og dermed er

$$\text{Volum} = 2\pi \left(\Big[-x\cos x \Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,dx \right) = 2\pi\,(\pi - 0) = 2\pi^2$$

10. (3 poeng) Funksjonen F er definert ved $F(x) = \int_0^{x^3} \cos(t^2)\,dt$. Da er $F'(x)$ lik:

Svar: $3x^2\cos(x^6)$. Begrunnelse: Sett $G(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$. Da er $G'(x) = \cos(x^2)$ ifølge analysens fundamentalteorem. Siden $F(x) = G(x^3)$, får vi fra kjerneregelen

$$F'(x) = G'(x^3) \cdot (3x^2) = \cos((x^3)^2) \cdot (3x^2) = 3x^2\cos(x^6)$$

(Fortsettes på side 3.)

DEL 2

Oppgave 1

a) (10 poeng) Finn den reelle og den komplekse faktoriseringen til $P(z) = z^3 + 8$.

b) (10 poeng) Finn konstanter A, B og C slik at

$$\frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

c) (10 poeng) Løs integralet

$$\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx$$

Løsning: a) Ligningen $P(z) = 0$ er ekvivalent med $z^3 = -8$, og følgelig er røttene til $P(z)$ det samme som tredjerøttene til -8. Siden polarformen til -8 er $8e^{i\pi}$, blir tredjerøttene

$$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$w_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$

$$w_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+2\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}i} = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3}$$

Den komplekse faktoriseringen er

$$z^3 + 8 = (z - w_0)(z - w_1)(z - w_3) = (z+2)(z - 1 - i\sqrt{3})(z - 1 + i\sqrt{3})$$

Ganger vi sammen de to siste faktorene, får vi den reelle faktoriseringen

$$z^3 + 8 = (z+2)(z - 2z + 4)$$

Kommentar: Dette punktet kan også løses ved å observere at siden -2 er en rot i $P(z)$, må $P(z)$ være delelig med $z+2$. Utfører vi polynomdivisjonen, får vi den reelle faktorisering, og ved å løse annengradsligningen $z^2 - 2z + 4 = 0$, får vi så den komplekse faktoriseringen.

b) Multipliserer vi med fellesnevner på begge sider, får vi

$$12 = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2) = (A+B)x^2+(-2A+2B+C)x+B+2C$$

som gir ligningssystemet

$$A + B = 0 \qquad -2A + 2B + C = 0 \qquad 4A + 2C = 12$$

som har løsningene $A = 1$, $B = -1$, $C = 4$.

c) Den deriverte av nevnerer er $2x - 2$. Vi starter med å smugle dette uttrykket inn i telleren:

$$I = \int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}\,dx =$$

(Fortsettes på side 4.)

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2-6}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx - \int \frac{3}{x^2-2x+4}\,dx$$

I det første integralet innfører vi nevneren som ny variabel: $u = x^2 - 2x + 4$, $du = (2x-2)\,dx$:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx = \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) + C$$

I det andre integralet fullfører vi kvadratet i nevneren:

$$I_2 = \int \frac{3}{x^2-2x+4}\,dx = \int \frac{3}{x^2-2x+1+3}\,dx = \int \frac{3}{(x-1)^2+3}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{(x-1)^2}{3}+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{(x-1)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$$

Setter vi nå $z = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$, får vi $dz = \frac{1}{\sqrt{3}}dx$ og

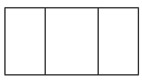
$$I_2 = \int \frac{\sqrt{3}}{z^2+1}\,dz = \sqrt{3}\arctan u + C = \sqrt{3}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

I alt har vi dermed

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \sqrt{3}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Oppgave 2 (10 poeng)

En speilprodusent planlegger å starte produksjonen av en ny serie. De nye speilene skal ha et areal på 1m^2 og være formet som et rektangel. Speilene blir delt i tre deler av to loddrette lister (se figur). Rundt hele speilet skal det også være lister. Hvor høye må speilene være for at den totale lengden av lister skal bli så kort som mulig?



Et speil

Løsning: Kall høyden til speilet x og lengden y. Lengden av listene er $L = 2y + 4x$. Siden arealet skal være 1 m^2, må $xy = 1$, dvs. $y = \frac{1}{x}$, og setter vi dette inn i uttrykket for L, får vi

$$L(x) = \frac{2}{x} + 4x$$

Derivasjon gir $L'(x) = -\frac{2}{x^2} + 4$, og vi ser at $L'(x) = 0$ når $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Det er lett å sjekke at dette er et minimumspunkt, og følgelig er listlengden kortest når $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 3 (10 poeng)

I denne oppgaven er $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Vis at den inverse matrisen er

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bruk dette til å finne en vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ slik at $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Løsning: Ganger vi matrisene, ser vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden en høyreinvers også er en venstreinvers, betyr dette at

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

er den inverse til A. Ganger vi ligningen $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fra venstre med A^{-1}, får vi $\mathbf{v} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dermed er

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -11 \\ -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4 (10 poeng)

Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx$$

konvergerer eller divergerer. Finn verdien til integralet dersom det konvergerer.

Løsning: Integranden divergerer når $x \to 0^+$, og vi har derfor at

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx$$

(Fortsettes på side 6.)

Observerer vi at $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, ser vi at det lønner seg å innføre $u = \sin x$ som ny variabel. Da blir $du = \cos x dx$, og vi får:

$$\int_a^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx = \int_{\sin a}^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u} = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln(\sin a)$$

Når a går mot null, går $\sin a$ også mot null, og dermed går $\ln(\sin a)$ mot $-\infty$. Dette betyr at integralet divergerer. Det går også an å vise divergens ved å sammenligne integranden med $\frac{1}{x}$.

Oppgave 5 (10 poeng)

I denne oppgaven er a og b to reelle tall, $a < b$, og $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon. Vis at dersom den deriverte f' er begrenset, så er f det også.

<u>Løsning:</u> Anta $|f'(x)|$ er begrenset av $M \in \mathbb{R}$, og la x_0 være et punkt i (a, b). For enhver annen $x \in (a, b)$ finnes det ifølge middelverdisetningen et punkt c mellom x og x_0 slik at

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

dvs.

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(c)||x - x_0| \leq M(b - a)$$

Dette betyr at $f(x)$ alltid ligger mellom $f(x_0) - M(b-a)$ og $f(x_0) + M(b-a)$, og følgelig er f begrenset på (a, b).

Slutt