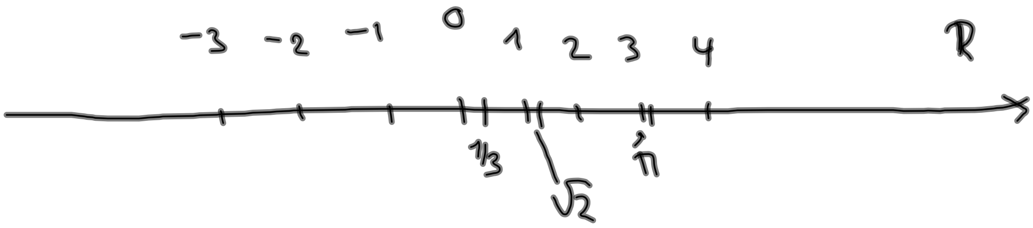
Reelle tall

Tallene på tallinjen, dvs alle desimaltallene



Tallsystemer:

Naturlige tall: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Heltall : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

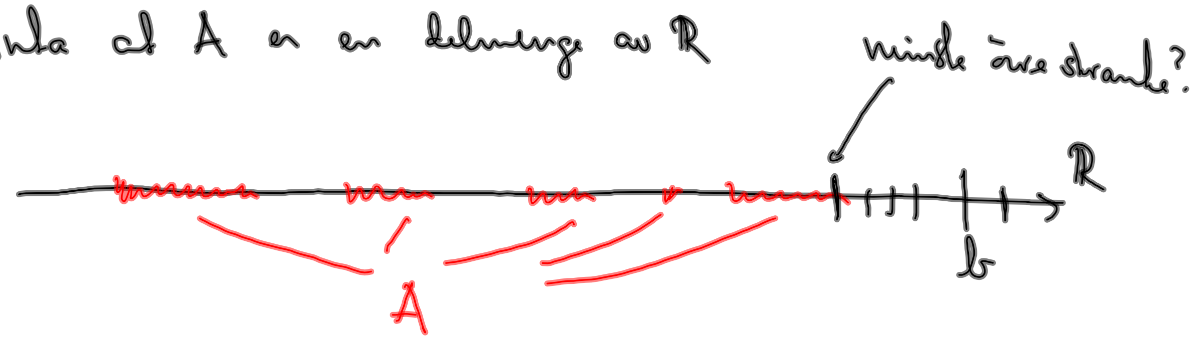
Rasjonale tall: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Reelle tall : $\mathbb{R}$ – de reelle tallene

Komplekse tall: $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$

"Hvis $a \in \mathbb{Q}$..." forkortelse for "Hvis a er et rasjonalt tall....."

Anta at A er en delmengde av $\mathbb{R}$



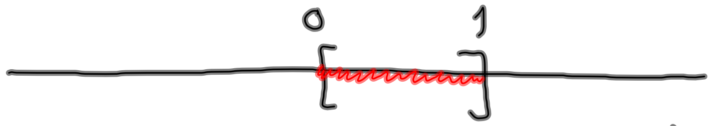
Et tall $b \in \mathbb{R}$ kalles en <u>øvre skranke</u> for A dersom b er større eller lik enn alle elementene i A, dvs $b \geq a$ for alle $a \in A$.

Vi sier at en mengde er <u>oppad begrenset</u> dersom den har en øvre skranke.

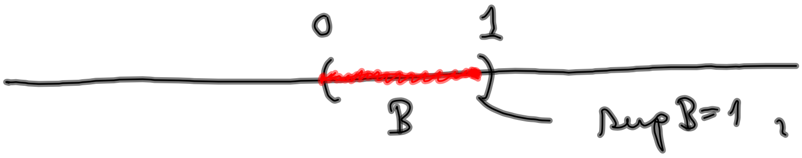
<u>Kompletthetsprinsippet</u>: Enhver oppad begrenset, ikke-tom mengde A har en minste øvre skranke. Denne minste øvre skranken kalles også supremum til mengden og betegnes med

Sup A.

<u>Eksempel</u>: $A = [0,1]$, $B = (0,1)$



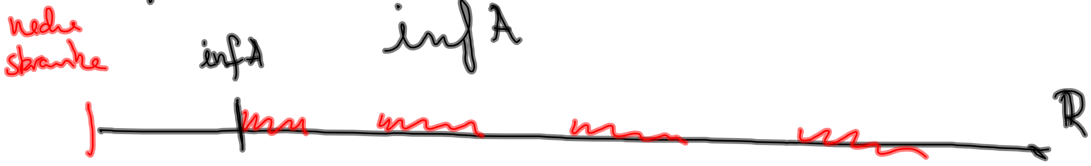
$\sup A = 1$, $1 \in A$



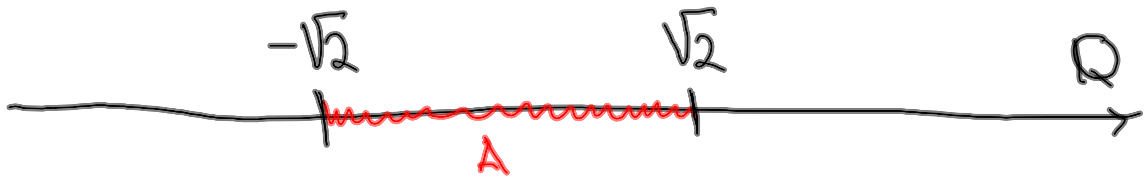
$\sup B = 1$, $1 \notin B$

Tilsvarende har enhver nedad begrenset mengde en største nedre skranke som også kalles infimum til A og betegnes med

$$\inf A$$

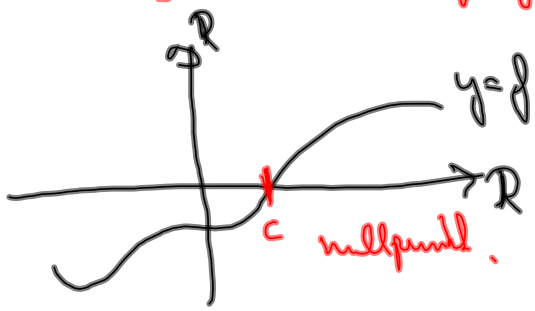


Hvis vi bare hadde arbeidet med rasjonale tall,
ville Kompletthetsprinsippet ikke ha holdt:



$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ har ikke inf og sup innenfor $\mathbb{Q}$

Konsekvenser:



Følger (4.3)

En følge er en uendelig sekvens av tall:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

Kan starte andre steder

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

eller

$$a_{-17}, a_{-16}, \dots, a_0, a_1, \dots$$

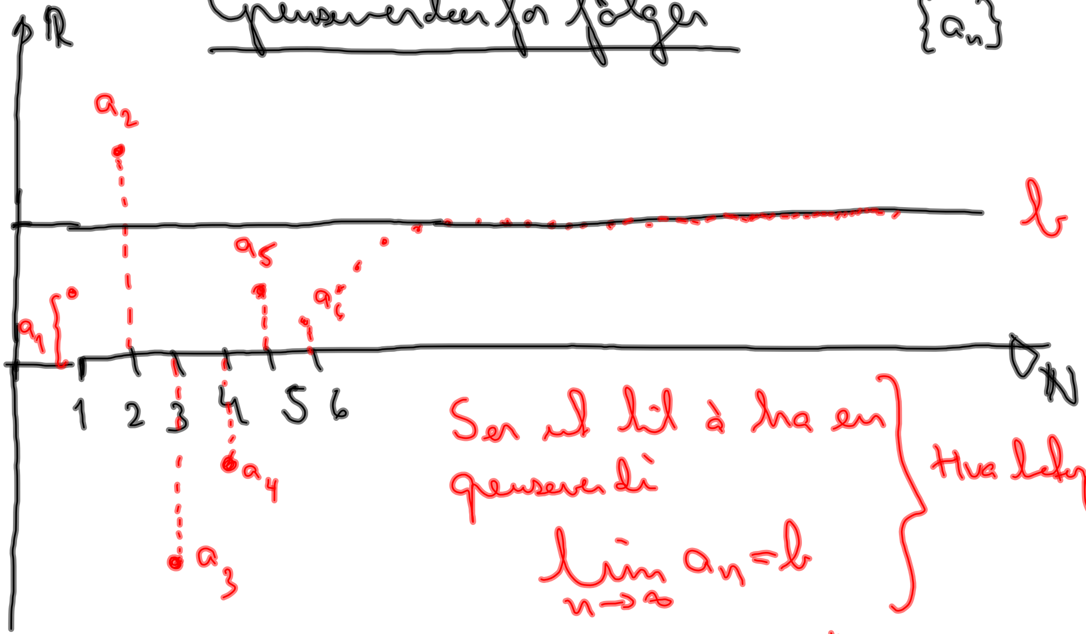
Kortfattet skrivemåte $\{a_n\}$ evt. $\{a_n\}_{n=-17}^{\infty}$

<u>Eksempel</u>: (i) $1, 2, 3, 4, \dots$ $\quad \{n\}$ evt $\{n\}_{n=1}^{\infty}$

(ii) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ $\quad \left\{\frac{1}{n}\right\}$ evt $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(iii) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots$ $\quad \{\sqrt{n}\}$ evt $\dots$

Grenseverdier for følger $\{a_n\}$



Ser ut til å ha en grenseverdi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b$$

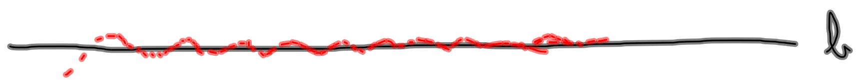
Hva betyr dette?

Forslag: "At det n-te leddet nesten blir b"

"a_n nærmer seg b når n går mot uendelig"

"Vi kan få a_n så nær b vi måtte ønske ved å velge n tilstrekkelig stor".

problematisering



10, $11^{\underline{30}}$, $13^{\underline{30}}$, $15^{\underline{00}}$

12 etasje SV-bygningen

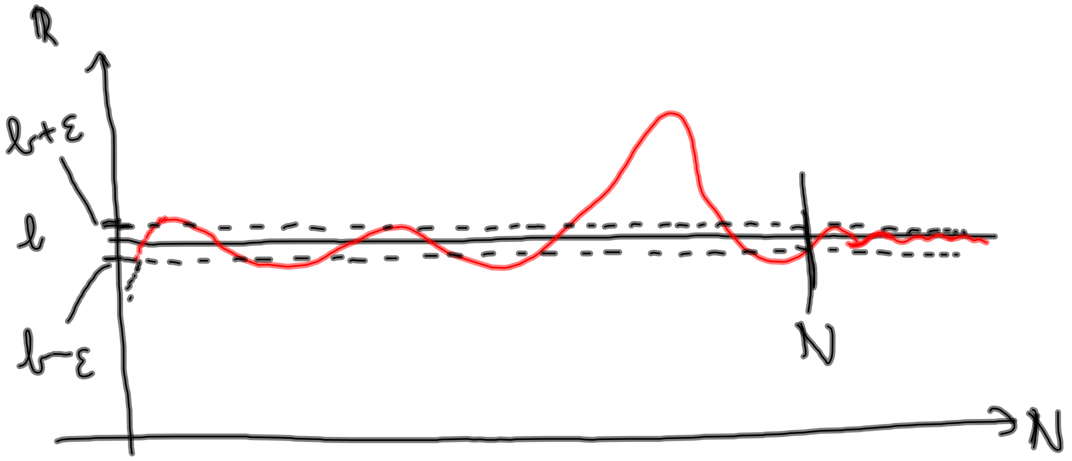
arrangert og betalt!!

Skal prøve å presisere forslaget:

"Vi kan få a_n så nær b vi ville ønske ved å velge n tilstrekkelig stor"

Hvor nær?

Hvor stor er det?



<u>Definisjon</u>: Følgen $\{a_n\}$ <u>konvergerer</u> <u>mot</u> b dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

for alle $n \geq N$.

Vi sier at a_n nærmer seg b som grense når $n \to \infty$.

<u>Notasjon</u>: $\lim_{n\to\infty} a_n = b$

Regneregler for grenseverdier. Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, så

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ forutsatt at $B \neq 0$.

To grunnleggende måter å regne ut grenseverdier på:

1. Bruk definisjonen
2. Bruk reglene ovenfor

I tillegg finnes det ulike triks.

Eksempel: Bruk definisjonen til å vise at $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=1$

(Husk: Vi må vise at til hver $\varepsilon>0$, finnes det en $N\in\mathbb{N}$

slik at $\underbrace{\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)-1\right|}<\varepsilon$ når $n\geq N$.)

Vi har $\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)-1\right| = \left|1-\frac{2}{n}-1\right| = \frac{2}{n}$

Hvordan får jeg $\boxed{\frac{2}{n}<\varepsilon}$ $\rightarrow$ $\frac{2}{\varepsilon}<n$

Hvis vi velger $N>\frac{2}{\varepsilon}$, så er $n>\frac{2}{\varepsilon}$ for alle $n\geq N$.

Da vil $\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)-1\right| = \frac{2}{n}<\varepsilon$ HURRA!.

Definisjonen brukes i kun når nødvendigheten / foreleseren tvinger oss.

Grenseverdier via regnereglene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{7}{3}$$

I praksis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{7}{3}$$

trekker ut høyeste potens

Eksempel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2}{2-4n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^4}\left(\frac{2}{n^4}-4\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\left(\frac{2}{n^4}-4\right)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

<u>Beispiel:</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\cancel{n}}=$$

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}+1}=\frac{1}{1+1}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$