Derivasjon: Generelt: $y=f(x)$, $x=g(y)$ omvendte

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{der } y=f(x).$$

$$y=f(x)=\tan x, \quad f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

$g(y)=\arctan y$,

$$(\arctan y)'=\frac{1}{1+\underbrace{\tan^2 x}_{y^2}}=\frac{1}{1+y^2}$$

Vi har dermed vist:

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

dvs:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+C$$

Eksempel: $f(x)=\arctan(\sin x)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\sin^2 x}\cos x=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

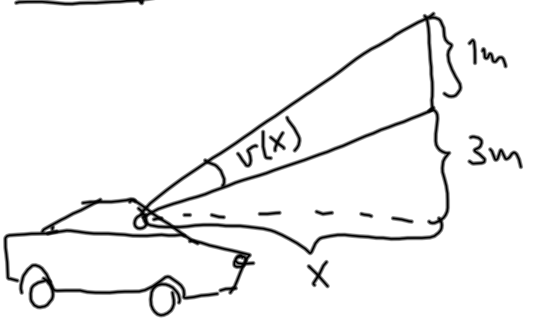
Eksempel: $$\lim_{x\to\infty} x\,(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}-\arctan x}_{0})=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$$

$\infty$ $0$ $0$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{+\frac{1}{1+x^2}\,x^2}{+\frac{1}{x^2}\,x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\overset{L'h}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=\underline{\underline{1}}$$

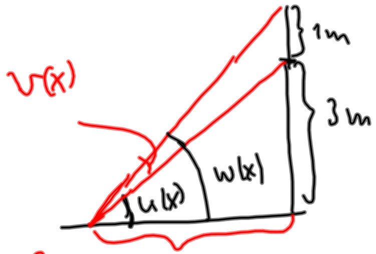
$\infty^2$ $0$

Eksempel:




Når er vinkelen v størst?

Hvilken x-verdi svarer til størst v?




$$v(x) = w(x) - u(x) = \arctan\frac{4}{x} - \arctan\frac{3}{x} \Leftarrow \begin{cases} u(x) = \arctan\frac{3}{x} & \Leftarrow \tan u(x) = \frac{3}{x} \\ w(x) = \arctan\frac{4}{x} & \Leftarrow \tan w(x) = \frac{4}{x} \end{cases}$$

For å finne når $v(x)$ er størst, deriverer vi:

$$v'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{4}{x}\right)^2}\left(-\frac{4}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2}\left(-\frac{3}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{4}{x^2+16} + \frac{3}{x^2+9} = \frac{-4(x^2+9) + 3(x^2+16)}{(x^2+16)(x^2+9)}$$

$$= \frac{-4x^2 - 36 + 3x^2 + 48}{(x^2+16)(x^2+9)} = \frac{-x^2+12}{(x^2+16)(x^2+9)}$$

som er null når $x^2 = 12$, dvs $x = \sqrt{12}$ $= \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$

Utsatt frist på oblig: 20. oktober:

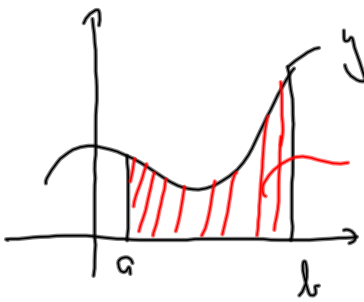
# INTEGRASJON

Stammer fra volum- og arealberegninger.

Gjennombrudd 1660-70 → integrasjon og derivasjon; motsatte regningsarter.

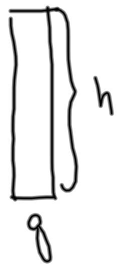
koordinatsystem.

## Arealberegninger

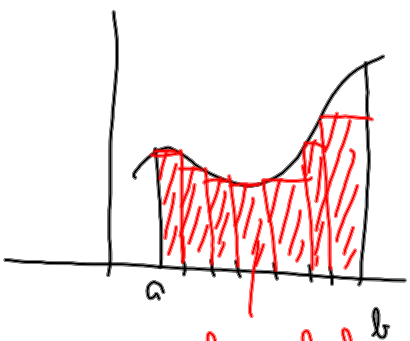



areal:

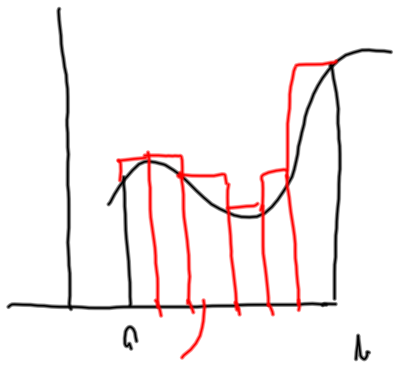
Vet:




$A = gh$



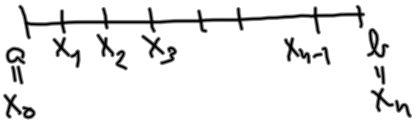

areal av boksene: nedre tilnærming.




areal av boksene: övre tilnærming.

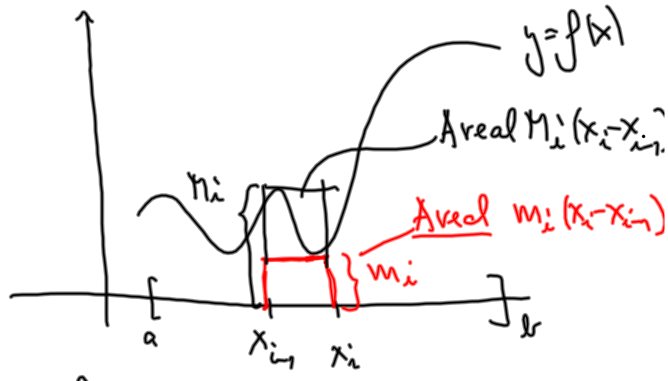
Dersom $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en begrenset funksjon, så lar vi

$\Pi$: $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ være en <u>partisjon</u> av $[a,b]$




$$m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

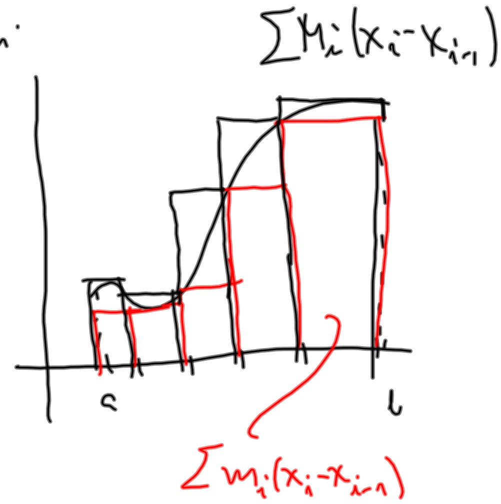
og $$M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$$




Samlet areal til boksene under grafen: $\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$

Samlet areal til boksene over grafen:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

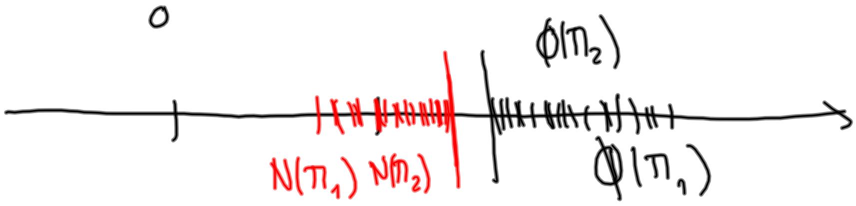



<u>Øvre trappesum:</u>

$$Ø(\Pi)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

<u>Nedre trappesum:</u>

$$N(\Pi)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$




<u>Nedre integral:</u> $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\sup\{N(\Pi): \Pi \text{ er en partisjon}\}$

<u>Øvre integral:</u> $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\inf\{Ø(\Pi): \Pi \text{ er en partisjon}\}$

Generelt $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

**Definisjon:** Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er begrenset. Vi sier at $f$ er *integrerbar* dersom

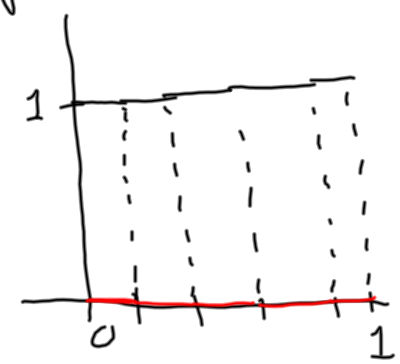
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

og i så fall definerer vi *integralet* $\int_a^b f(x)\,dx$ til å være den felles verdien, altså

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

**Eksempel:** En ikke-integrerbar funksjon:

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definert ved $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er irrasjonal.}\end{cases}$




$$\left.\begin{array}{l} N(\Pi) = 0 \\ \Phi(\Pi) = 1 \end{array}\right\} \text{for alle partisjoner}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1$$

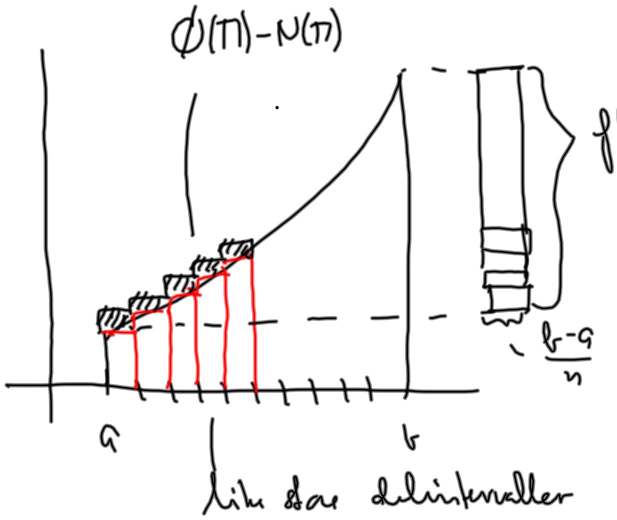
<u>To utfordringer:</u>

(i) Vise at de vanlige funksjonene er integrerbare.

(ii) Finne effektive metoder å regne ut integraler på

<u>Setning:</u> Enhver voksende funksjon $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er integrerbar.

<u>Triks:</u> For å vise at en funksjon er integrerbar, er det nok å vise at vi kan få $\emptyset(\Pi)$ og $N(\Pi)$ så nær hverandre vi måtte ønske ved å velge $\Pi$ smart.




$$\emptyset(\Pi)-N(\Pi)=(f(b)-f(a))\frac{b-a}{n}\to 0$$