Blandede oppgaver til kapittel 6

1. Deriver funksjonene:

a) $\sin x + \cos x$ b) $x \sin x$
c) $x \sin x + x \cos x$ d) $x^5 + \sin x$
e) $\sin x \cos x$ f) $\sin^2 x$
g) $5 \sin^2 x$ h) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$
i) $\tan x$ j) $\sin(x^2)$
k) $\sin(1 + x + x^2)$ l) $f(x) = x^2 \sin x$
m) $f(u) = \dfrac{1-u}{\cos u}$ n) $f(\alpha) = \sin\alpha \cos\alpha$
o) $f(t) = a \sin[\omega(t - t_0)]$ p) $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

2. Beregn:

a) $\dfrac{d}{dx}(x^4 + ax)$ b) $\dfrac{d}{dx} \sin x$ c) $\dfrac{d}{du} \cos \omega u$
d) $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1-uz}{1-z}\right)$ e) $\dfrac{d}{dv}(v_0 + v \cos\alpha)$

3. Deriver funksjonene:

a) $x \ln x$ b) $\dfrac{\sin x}{\ln x}$
c) $\ln |x|$ d) $\ln(\cos x)$
e) $f(t) = \ln(1 + t^2)$ f) $\ln(\ln x)$

4. Deriver funksjonene:

a) e^x b) e^{5x} c) e^{kx}
d) e^{2x+1} e) e^{-3x+5} f) $e^{-(x-2)(x-3)}$
g) xe^x h) $x^2 e^x$ i) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

5. Deriver funksjonene:

a) x^{-1} b) x^{-2} c) x^{-3}
d) $x^{-1/2}$ e) $x^{3/2}$ f) $x^{1.05}$

6. Deriver funksjonene:

a) x^π b) $(\sin x)^\pi$ c) π^x
d) $e^{x \ln x}$ e) x^x

7. Deriver funksjonene:

a) $f(t) = ce^{k(t-t_0)}$ b) $f(x) = a \exp\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)$
c) $f(x) = 2^x$ d) $f(u) = u^r$
e) $f(u) = \sqrt{u}$ f) $f(t) = (at + C)^{-r}$
g) $V = S^{3/2}$ h) $E(v) = av^{k+1}$

8. Tabellen viser hvordan folketallet (per januar) i et tenkt u-land vokser.

t (år)	1970	1975	1980
y (folketall, mill.)	96.3	107.9	121.9

Beregn den gjennomsnittlige vekstraten (mill. per år) for hvert av tidsintervallene $[1970, 1975]$, $[1975, 1980]$ og $[1970, 1980]$.

9. En størrelse y varierer med tiden, og har verdien $y_0 = 19.4$ ved tiden $t = 1$, og verdien $y_1 = 23.2$ ved tiden $t = 5$. Tiden måles i år. Finn følgende for tidsintervallet $[1, 5]$:

a) den gjennomsnittlige vekstraten
b) den relative økningen
c) den prosentvise økningen
d) vekstfaktoren

10. I denne oppgaven skal du beregne stigningstallet til funksjonen $f(x) = x^3$ i punktet $x = \frac{4}{3}$ på to forskjellige måter:

a) Tilnærmet beregning ved grafisk metode: Regn ut funksjonsverdien i noen punkter i nærheten av $x = \frac{4}{3}$, trekk på øyemål en glatt kurve gjennom punktene, og trekk deretter på øyemål tangenten i punktet $x = \frac{4}{3}$. Anslå tangentens stigningstall ut fra figuren.
b) Eksakt beregning ved hjelp av derivert.

11. Finn stigningstallet til funksjonen

$$f(x) = 7x - 3$$

i hvert av punktene $x = 1$, $x = 2$ og $x = 3$.

12. Finn den deriverte til følgende funksjoner ved hjelp av definisjonen.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 8$

13. Sett $f(x) = 2x^2 + 1$.

a) Finn $f'(x)$ ved å bruke definisjonen.
b) Finn stigningstallet til f i punktet $x = 5000$.

14. La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

for $x \neq 0$, og sett $f(0) = 0$.

a) Tegn grafen til f, og undersøk hvor f er kontinuerlig.
b) Avgjør om f er deriverbar i $x = 0$.

15. Deriver funksjonene:

a) $x^2 + x^3$

b) $1 + x + x^2$

c) $1 + x + x^2 + \cdots + x^r$

d) $5x$

e) 5

f) $\dfrac{1}{1-x}$

g) $\dfrac{5x^2+3}{3x+7}$

h) $\dfrac{x}{|x|}$

16. Deriver følgende funksjoner:

a) $g(t) = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{1-t}$

b) $f(k) = 1 + k + k^2$

c) $I(r) = \dfrac{r+1}{r-1}$

d) $f(x) = (1 + x + x^2)^{109}$

17. Drøft fortegnet til produktet

$$y = (x-1)(x-3)(x+2)(x+4)$$

ved hjelp av fortegnsdiagram.

18. Drøft fortegnet til funksjonen $x^2 - 3x - 10$.

19. Finn $f'(x)$. Undersøk hvor f er voksende, og hvor f er avtakende. Finn eventuelle punkter $(c, f(c))$ der grafen til f har horisontal tangent.

a) $f(x) = x^2 - 12x + 50$

b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 1$

20. For hvilke verdier av a er $x^3 - 3x^2 + 3ax$ strengt voksende overalt?

21. Finn den andrederiverte.

a) x

b) x^2

c) x^3

d) x^n

22. Finn $f''(x)$ og drøft fortegnet til $f''(x)$. Undersøk hvor grafen til f krummer oppover og hvor den krummer nedover. Finn eventuelle vendepunkter.

a) $f(x) = x^{15} + 3x + 9$

b) $f(x) = x^{16} - 2x + 14$

I de tre neste oppgavene skal du gjøre følgende punkter:

a) Finn eventuelle nullpunkter for f.

b) Finn $f'(x)$, og avgjør hvor f er voksende, og hvor f er avtakende.

c) Finn $f''(x)$. Drøft fortegnet til $f''(x)$. Undersøk hvilken vei grafen til f krummer, og finn eventuelle vendepunkter.

d) Finn eventuelle asymptoter for f.

e) Skisser grafen til f ut fra det som er funnet, og noen punkter på grafen som du selv velger.

23. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$, der a er en positiv konstant.

26. En funksjon f er definert i intervallet $[0, \rightarrow\rangle$ og har følgende egenskaper: $f(0) = 0$, $f' > 0$ og $f'' < 0$. Skisser grafen til f så godt som det er mulig.

27. I en modell for plantevekst setter vi $y = f(x)$ der y (kg/dekar) er avlingsstørrelsen vi får ved å bruke x kg gjødsel per dekar. Anta at f har alle egenskapene som er nevnt i forrige oppgave, og tenk deg at grafen til f er gitt som en kurve på en figur. La p_1 og p_2 være kiloprisen for henholdsvis gjødsel og avling. Hvordan vil du ved hjelp av figuren og gitte verdier for p_1 og p_2 anslå den gjødselmengden per dekar som gir størst fortjeneste?

28. La $x_1, \ldots, x_n$ være måleresultater. Finn den verdien av a som gjør verdien av uttrykket

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$$

minst mulig. Synes du svaret ser rimelig ut?

29. Du har fått en 100 cm lang ståltråd som du skal bøye sammen til et rektangel. Hvor lange skal sidene av rektanglet være for at rektanglet skal få maksimalt areal?

30. Hva er den største verdien produktet av to relle tall kan ha, gitt at summen av de to tallene skal være 10?

31. Hva er den største verdien produktet av to reelle tall kan ha, gitt at summen av dem skal være et gitt positivt tall k?

32. Du skal lage en rettvinklet kasse uten lokk og med kvadratisk bunn. Volumet av kassen skal være 4000 cm^2. Hvilke mål skal kassen ha for at det skal gå med minst mulig materialer til å lage den, dvs. for at summen av sidenes overflatearealer skal bli minst mulig?

33. La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x, \qquad D_f = \mathbf{R}.$$

a) Finn eventuelle nullpunkter for f.

b) Avgjør hvor f vokser og avtar, og angi eventuelle ekstremalpunkter for f.

c) Avgjør hvor f er konveks og konkav, og angi eventuelle vendepunkter.

d) Skisser grafen til f.