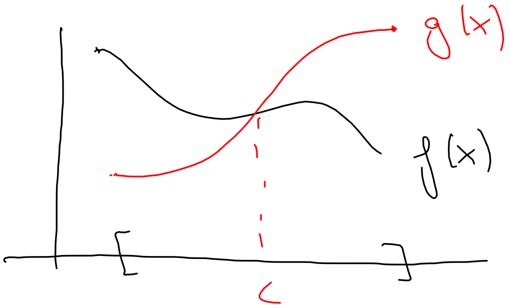
<u>Liten vi</u>

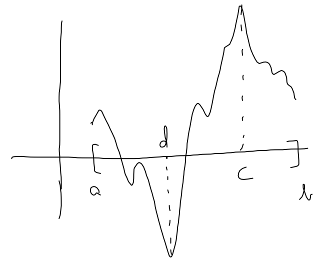


<u>Setning</u>: Anta at $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige og $f(a) < g(a)$ og $f(b) > g(b)$. Da finnes det en $c \in (a,b)$ der $f(c) = g(c)$.

<u>Bevis</u>: La $h(x) = f(x) - g(x)$. Da er h kontinuerlig og $h(a) = f(a) - g(a) < 0$ og $h(b) = f(b) - g(b) > 0$. Ifølge skjæringssetningen har h et nullpunkt c i intervallet (a,b). Dermed er

$$0 = h(c) = f(c) - g(c) \implies f(c) = g(c).$$

Ekstremalverdisetning

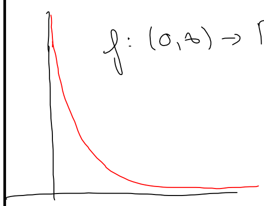


Definisjon: Vi sier at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ har et maksimumspunkt i c dersom

$$f(c)\ge f(x) \text{ for alle } x\in[a,b]$$

Tilsvarende har f et minimumspunkt i d dersom

$$f(d)\le f(x) \text{ for alle } x\in[a,b]$$



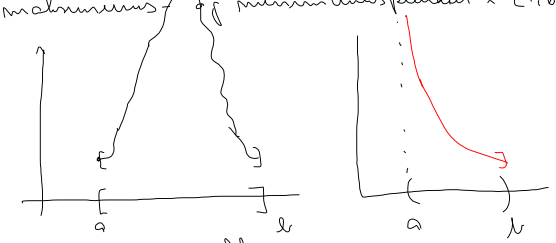
$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{x}$

Har hverken maks. eller min., men den er begrenset nedover av 0, men den er ikke begrenset oppover.

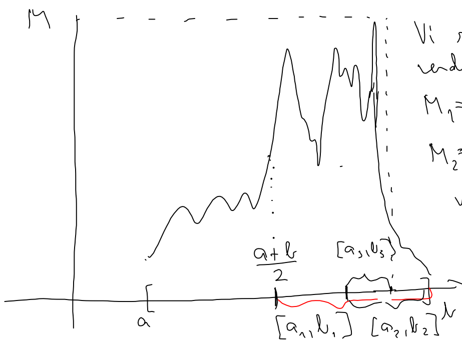
Ekstremalverdisetningen: Hvis $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon definert på et lukket, begrenset intervall, så har f maksimums- og minimumspunkter i $[a,b]$.

Intuisjon:



Bevisskisse for maksimumspunkt: La

$$M=\sup\{f(x): x\in[a,b]\} \text{ (der } M=\infty \text{ dersom } f \text{ er ubegrenset).}$$



Vi ser at én av verdiene

$M_1=\sup\{f(x): x\in[a,\frac{a+b}{2}]\}$

$M_2=\sup\{f(x): x\in[\frac{a+b}{2},b]\}$

må være lik M.

På denne måten får vi en kjede av stadig mindre intervaller $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, .. der supremum til funksjonen er M. Vi kan plukke ut et punkt c_n fra hvert intervall $[a_n,b_n]$ slik $f(c_n)\to M$. Siden $\{a_n\}$ er voksende, begrenset følge, går den mot en grense c. Siden intervallene blir kortere og kortere, må også $c_n\to c$. Siden f er kontinuerlig, må

$$f(c_n)\to f(c).$$

Dermed er $f(c)=M$, så c er et maksimumspunkt for funksjonen (og M er endelig).

sep 9-12:33

Eksempel: La $f: [0,10] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \frac{e^{x^2 + \sin x}}{x^4 + e^{\cos x}}$$

Vis at f har et maksimumspunkt.

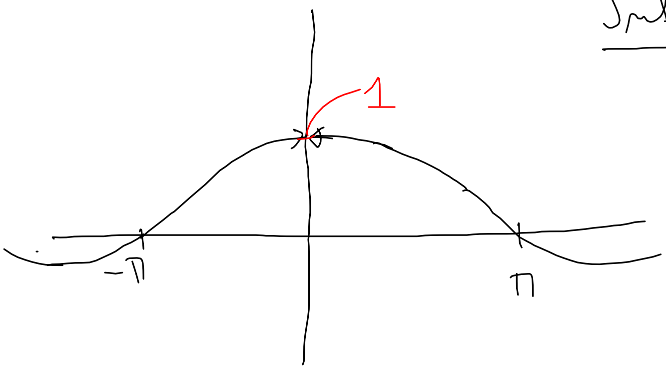
Typisk student: Dette vet jeg hvordan jeg gjøre. Jeg deriverer og setter $f'(x) = 0$.....

Typisk professor: Aha, denne funksjonen er kontinuerlig og intervallet er lukket og begrenset. Altså har f et maks punkt ifølge ekstremalverdisetningen

Grenser

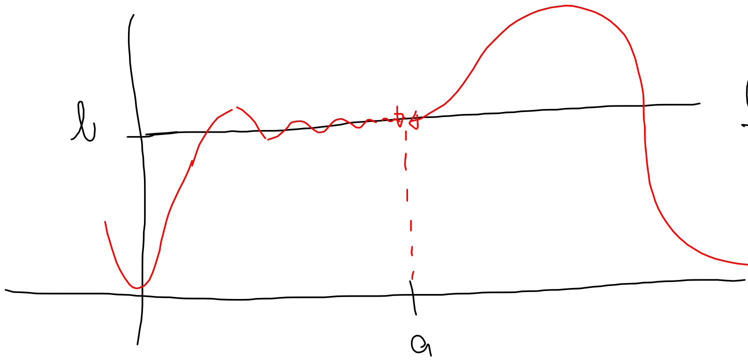
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ for $x \neq 0$

Intuitivt $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



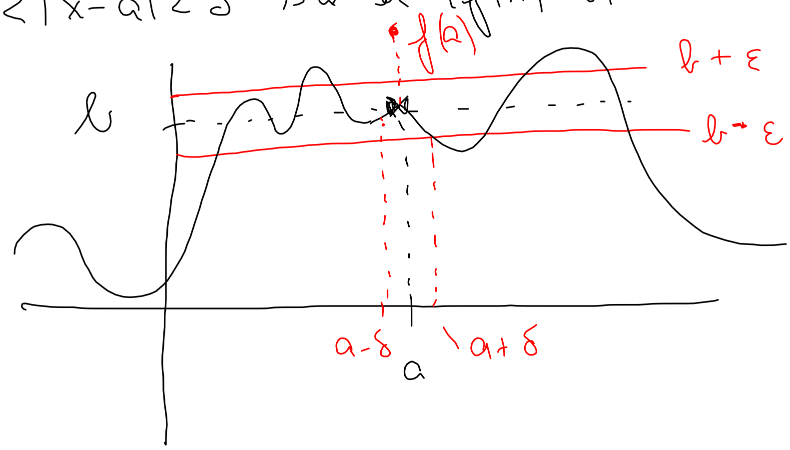
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(hva som skjer med f i a er irrelevant)



Uformelt: Vi kan få $f(x)$ så nær b vi måtte ønske ved å velge x tilstrekkelig nær (men ikke lik) a.

Definisjon: Vi sier at $\lim_{x \to a} f(x) = b$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $0 < |x-a| < \delta$ så er $|f(x) - b| < \varepsilon$



Eksempel: Bruk definisjonen av grenseverdi til å vise at $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$.

Vi må vise at gitt $\varepsilon > 0$, finnes det en $\delta > 0$ slik når $0 < \underbrace{|x-4|}_{h} < \delta$, så er $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$.

La $h = x - 4$, da $x = 4 + h$.

Vi har

$$|\sqrt{x} - 2| = |\sqrt{4+h} - 2| = \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{\sqrt{4+h}+2}$$

$$= \frac{\cancel{4}+h-\cancel{4}}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{h}{\sqrt{4+h}+2} < \frac{h}{2} < \varepsilon \text{ forutsatt at } |h| < 4$$

ønsker, dvs $h < 2\varepsilon$

Velger $\delta = \min\{2\varepsilon, 4\}$.

Må sjekke at hvis $0 < \underbrace{|h|}_{|x-4|} < \delta$, så er $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$.

Har fra før

$$|\sqrt{x} - 2| < \frac{h}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$